

Неопределенный интеграл.

Процесс нахождения неопределенного интеграла называют интегрированием функции.

❖ Совокупность первообразных $F(x) + C$ для данной функции называется неопределенным интегралом.

Обозначается: $\int f(x)dx = F(x) + C$

$f(x)$ - называется подынтегральной функцией.

$f(x)dx$ - называется подынтегральным выражением.

C - постоянная интегрирования.

Таблица основных интегралов:

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$3. \int e^x dx = e^x + C$$

$$4. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$5. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$6. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$5. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$$

$$8. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arccot} x + C_1$$

Простейшие способы интегрирования.

а) **непосредственное интегрирование** заключается в использовании свойств неопределенного интеграла и приведение к табличному виду.

Пример 1: $\int (2x^2 + 6x - 7)dx = \int 2x^2 dx + \int 6x dx - \int 7 dx = 2 \frac{x^3}{3} + 6 \frac{x^2}{2} - 7x + C$

б) **интегрирование подстановкой** (заменой переменных) заключается в переходе от данной переменной интегрирования к другой для упрощения подынтегральной функции.

$$f(x) = f(\varphi(u)); dx = \varphi'(u) \cdot du$$
$$\int f(x)dx \text{ сделаем подстановку } x = \varphi(u) \quad \int f(x)dx = \int f(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u) \cdot du$$

Пример 2: $\int e^{3x+5} dx$; введем новую переменную $u = 3x + 5$, тогда

$$du = u' \cdot dx = 3dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$$

$$\int e^{3x+5} dx = \int e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int e^u du = \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{3x+5} + C$$

в) интегрирование по частям.

Формула интегрирования по частям:

$$\int u d\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du$$

этот способ применяется, если интеграл упрощается.

Пример 3: $\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{\sin dx}_{d\vartheta} = x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$

$$u = x; \quad du = dx$$

$$d\vartheta = \sin x dx$$

$$\vartheta = (d\vartheta) = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

Пример 4:

Скорость роста популяции насекомых $v = t + t^2$. При $t=0$ число особей в популяции равно 10 000. Определить численность популяции спустя 3 дня.

Дано:

$$v = t + t^2$$

$$t=0, P=10\ 000$$

Найти:

$$P(3)=?$$

Решение:

$$P = \int \vartheta dt = \int (t + t^2) dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$$

так как $P(0)=10\ 000$, то $C=10\ 000$

$$P(3) = \frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3} + 10000 = 10013,5 \approx 10014 \text{ (особей)}$$

Ответ: $P(3) \approx 10014$ (особей)

Задачи для самостоятельного решения.

71 Вычислить неопределенные интегралы:

- 1) $\int \sqrt{2x-3} dx$;
- 2) $\int \cos 3x dx$;
- 3) $\int e^{2x+1} dx$;
- 4) $\int (e^x + e^{-x}) dx$;
- 5) $\int (x+1)^{3/2} dx$;
- 6) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$;
- 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$;
- 8) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2+2}}$;
- 9) $\int \frac{x^3 dx}{(x^4-2)^3}$;
- 10) $\int x \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx$;
- 11) $\int \frac{2 dx}{3-4x}$;
- 12) $\int x \sqrt{x^2+1} dx$;
- 13) $\int x \sqrt{1-x^2} dx$;
- 14) $\int x^2 (x^3+9)^3 dx$;
- 15) $\int \frac{x dx}{2x^2+3}$;
- 16) $\int \frac{x^6 dx}{(x^7-2)^2}$;
- 17) $\int \frac{a dx}{a-x}$;
- 18) $\int e^{x^2} x dx$;
- 19) $\int \frac{e^x+1}{e^x} dx$;
- 20) $\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$;
- 21) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx$;
- 22) $\int \frac{2e^x}{(2+e^x)^2} dx$;
- 23) $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt[3]{e}}$;
- 24) $\int e^{2x+3} dx$;
- 25) $\int \cos 3x dx$;
- 26) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$;

$$27) \int \frac{dx}{\cos^2 2x};$$

$$28) \int (\sin \frac{x}{2} + \cos 2x) dx;$$

$$29) \int \frac{dx}{\cos^2(1-2x)};$$

$$30) \int x^2 \sin 3x^3 dx;$$

$$31) \int \sin^2 x \cos x dx;$$

$$32) \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx;$$

$$33) \int e^{\cos x} \sin x dx;$$

$$34) \int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx;$$

2 Скорость роста популяции насекомых $v = t + t^2$ (где t выражается в днях). При $t=0$ число особей в популяции равно 10 000. Определить численность популяции спустя: 1) 1 день; 2) 5 дней; 3) 10 дней.

3 Скорость роста числа бактерий задается формулой $v = 10^4 - 2 \cdot 10^3 t$. Составить уравнение роста числа бактерий $x(t)$, если при $t = 0$ $x(0) = 10^6$.

4 Скорость растворения лекарственного вещества из таблетки $v = -c_0 k F e^{-k F t}$, где c_0 - концентрация лекарственного вещества при $t = 0$, k - постоянная растворения, F - площадь поверхности растворяемого вещества в единице объема. Составить уравнение растворения лекарственного вещества, если при $t = 0$ $c = c_s - c_0$, где c_s - концентрация насыщения.

5 Скорость движения кисти руки задана уравнением $v = \frac{1}{2} t^2 + 3$. Найти уравнение движение кисти, если за первые 6с было пройдено 40см

Определенный интеграл.

Определенный интеграл, его смысл.

Дана неотрицательная функция $y = f(x) > 0$

Фигура ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью ОХ называется криволинейной трапецией.

❖ Предел интегральной суммы называется определенным интегралом.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma, \quad a, b - \text{пределы интегрирования}$$

Геометрический смысл:

Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции ограниченной графиком функции $f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью ОХ.

Формула Ньютона-Лейбница.

Для вычисления определенного интеграла используется формула Ньютона-Лейбница:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ - первообразная, а $F(b) - F(a)$ - приращение первообразной.

Пример 1: $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$

Применение определенного интеграла:

1. Вычисление площади криволинейной трапеции

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2. Определение работы переменного силы

$A = \int_0^S f(S)dS$, работа переменной силы численно равна интегралу от силы, взятой по пути S .

1. Вычислить определённые интегралы:

2.	$\int_0^1 e^x dx$	5.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$
3.	$\int_{-2}^3 (2x^3 + x^2 - 5) dx$	6.	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$
4.	$\int_2^8 \frac{2+x}{x} dx$	7.	$\int_1^2 x^3 \ln x dx$

2 Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривой $y = \cos x$ и осью Ох, в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

3 Реакция организма на определенную дозу лекарственного препарата $f(t) = 3t^2 - 2t$ в момент времени t . Определить суммарную реакцию на данную дозу за первые 5 с.

4 Тело движется в некоторой среде прямолинейно по закону $S = t^2$. Сопротивление среды пропорционально квадрату скорости движения. Вычислить работу, произведенную силой сопротивления среды при передвижении тела от $S=0$ до $S=a$.

5 В момент времени t скорость изменения концентрации препарата с изотопным индикатором $v = e^{-t \ln 2}$. Найти концентрацию препарата в момент времени t .

6 Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:

- 1) $y=4-x^2, y=0$;
- 2) $y=3-2x-x^2, y=0$;
- 3) $y=\ln x, y=0, x=e$
- 4) $y=x^2-2, y=6-x^2$
- 5) $y=\frac{2}{x}, y=0, x=1, x=4$;
- 6) $y=x^2, y=2-x^2$;
- 7) $y=x^2+4x, y=x+4$;
- 8) $y=6x-x^2, y=0$;
- 9) $y=x^3, y=8, x=0$;
- 10) $y=2^x, y=2, x=0$;
- 11) $y=5x, y=0, x=2$;
- 12) $y=3x-1, y=0, x=2, x=4$;
- 13) $y=x^3, y=2x$;
- 14) $y=4(1-x^3), y=0, x=0$;
- 15) $y=x^2-x, y=0, x=2, x=0$;
- 16) $2x^2, y=0, x=2, x=4$;
- 17) $y=x^2-x, y=0$;
- 18) $y=2x-x^2, y=x$;
- 19) $y=\frac{x^2}{2}, y=4-x$;
- 20) $y=x^2, y=1-x^2$;
- 21) $y=4x-5, y=0, x=-3, x=-2$;
- 22) $y=2x^2+2x, y=0, x=0, x=3$;
- 23) $y=x^3, x=2, x=3$;
- 24) $y=x^2, y=x$;
- 25) $y=\sin x, y=0, x=0, x=\pi$;
- 26) $y=e^{-x}, y=0, x=1, x=2$.

7 Найдите интегралы методом интегрирования по частям:

- 1) $\int x \cos x \, dx$;
- 2) $\int x \cos 3x \, dx$;
- 3) $\int x \ln x \, dx$;
- 4) $\int x e^x \, dx$;
- 5) $\int x^2 \sin 2x \, dx$;
- 6) $\int x^3 \ln x \, dx$;
- 7) $\int x e^{-x} \, dx$;

8) $\int x^2 e^{-2x} dx;$

9) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx;$

10) $\int x \sin x dx;$