ГБОУ ВПО
Оренбургская Государственная медицинская академия
Министерства здравоохранения и социального развития
Российской Федерации

Кафедра биофизики и математики.

Н.И. Колосова
Г.В. Бахарева

Практикум по высшей математике и биологической статистике

Учебное пособие для студентов

Оренбург 2012 г

УДК 51
Н.И.Колосова
Г.В. Бахарева
Под общей редакцией д.м.н. Е.Н. Денисова

Практикум по высшей математике и биологической статистике.

Оренбург 2012 г, 140 стр.

Рецензенты:

Акимов И. А. -Заведующий кафедрой математического анализа и методики преподавания математики ГОУ ВПО «Оренбургский государственный педагогический университет», доктор технических наук, профессор

Ховрин Г.В.- доцент кафедры радиофизики и электроники физического факультета ОГУ.

Учебное пособие рассмотрено и рекомендовано к печати РИС ОрГМА.
Учебное пособие предназначено для студентов фармакологического факультета.

СОДЕРЖАНИЕ

Цель учебного пособия- выработать практические навыки по применению методов высшей математики, теории вероятностей, математической статистики для решения конкретных медико-биологических задач и ситуаций.

Представленные в пособии задания состоят из:

- формализованных упражнений, предназначенных для освоения техники дифференцирования, интегрирования, решения дифференциальных уравнений первого порядка;
- задач медико- биологического профиля.

Задачи подобраны таким образом, чтобы показать некоторые возможности высшей математики, теории вероятностей и математической статистики в решении вопросов кинетики ферментативных реакций, биологии, генетики, нормальной физиологии, микробиологии, иммунологии, фармакодинамики, патогенетических механизмов ряда заболеваний, оценок популяционных параметров.

Пособие содержит примеры решения типовых задач, необходимый и достаточный набор математических формул и статистических таблиц.

Задания соответствуют требованиям Государственного (2010г) образовательного стандарта, примерной учебной программе для студентов 1 курса медицинских вузов.

Решение задач, представленных в пособии, создает необходимую базу для успешного усвоения студентами старших курсов медицинских вузов методов статистического анализа проблем гигиены, социальной медицины и здравоохранения.

Пособие предназначено для студентов медицинских вузов, а также для клинических ординаторов и аспирантов.

II. Высшая математика

1. Функции.

- переменной называется величина, которая в данных условиях может принимать множество различных числовых значений.
- соответствие между двумя множествами, при котором каждому элементу первого множества соответствует не более одного элемента второго множества называется функцией.
- Совокупность всех значений аргумента x, для которых функция $y = f(x)$ определена называется областью определения функции D_f.

Пример 1: Найти область определения функции $y = \sqrt{9 - x^2}$.

Функция имеет смысл при $9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9; |x| \leq 3$.

Ответ: $D_f = [-3;3]$

- Функция $f(x)$ называется четной, если:

1) область определения D_f симметрична относительно 0.
2) $\forall x, \in D_f$, $f(-x) = f(x)$

График четной функции всегда симметричной относительно ординат OY.

Пример 2: $f(x) = x^2$

1) D_f - симметрична относительно 0Y
2) $f(-x) = (-x\ )^2 = x^2$

Ответ: $f(x) = x^2$ является четной

- Функция называется нечетной, если

1) область определения D_f - симметрична относительно 0X.
2) $f(x)$, $x \in D_f$, $f(-x) = f(x)$

График симметричен относительно начала координат

Две функции считаются равными (тождественными), если:

1) у них одинаковые законы соответствия.
2) области определения равны.

Задачи для самостоятельного решения.

1.1 Найти область определения функции:

1. (x)= $\sqrt{5-2x}$
2. f(x)= x^2+3x+5
3. f(x)= $\sqrt{3+x}$
4. f(x)= sin3x
5. f(x)= e^x
6. f(x)= $\sqrt{2-3x} + \lg x$
7. f(x)= $\dfrac{\sin x}{x^2 + 4 - 5x}$
8. f(x)= 2^x
9. f(x)= $\sqrt{x-3} + \dfrac{1}{x^2 - 4}$
10. f(x)= $\dfrac{x^2 - 1}{4 - x^2}$

1.2 Установите, является ли каждая из следующих функций четной, нечетной или функцией общего вида: $y = 3x^2+2$

1. $y = x^3+1$
2. $y = 2\sin x + \cos x$
3. $y = 2x^2-6$
4. $y = \sqrt{x^3+1}$
5. $y = \dfrac{x}{\sin x}$
6. $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}$
7. $y = 5^x$

1.3 Тождественны ли следующие функции:

1. $f(x)=\dfrac{x}{x}$ и $g(x)=1$
2. $f(x)=\lg x^2$ и $g(x)=2\cdot\lg x$
3. $f(x)=\sqrt{x^4}$ и $g(x)=x^2$
4. $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$ и $g(x)=x$
5. $f(x)=\sin^2x + \cos^2x$ и $g(x)= 1$

2. Предел функции.

Функция y=f(x) имеет пределом число A при стремлении *x к* a,если для каждого числа ε>0 найдется такое число δ>0, что |y-A|<ε, при |x-*a*|<δ: $\lim\limits_{x\to 0} y = A$.

Основные теоремы о пределах

1. Предел постоянной величины

$\lim A = A.$

2. Предел суммы (разности) конечного числа функций

$$\lim_{x\to a}[f(x)+\varphi(x)+\psi(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a}\varphi(x) + \lim_{x\to a}\psi(x).$$

3. Предел произведений конечного числа функций

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)\cdot\psi(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x)\cdot\lim_{x\to a}\psi(x).$$

4. Предел частного двух функций:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}, \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0.$$

5. Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2{,}71828...(\textit{число } e).$$

Задачи для самостоятельного решения.

2.1 Вычислите пределы следующих функций:

1) $\mathop{Lim}\limits_{x\to\pi/6}\frac{x}{\sin x}$

2) $\mathop{Lim}\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

5) $\mathop{Lim}\limits_{x\to 0}\frac{1-x^2}{1+2x^2}$

6) $\mathop{Lim}\limits_{x\to -2}\frac{2x^2-1}{x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{2x^2+1}$

4) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+x-3}{2x-1}$

7) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3}$

2.2 Используя разложение функций на множители, вычислите пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$;

4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x+6}{x^2+8}$;

5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$;

6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$;

7) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$;

8) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-25}$;

9) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$;

10) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$;

11) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{(x-2)^2}$;

12) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$;

13) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$;

14) $\lim\limits_{x\to2a}\dfrac{4a^2-x^2}{x-2a}$.

2.3 Используя деление на аргумент, вычислите пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{3-4}}{x^2+5x^3}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2-x-1}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x}{x^2-1}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-2x^3}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^3+x^2+x+1}$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x^2+4}{5x-x^2-7x^3}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4x+8}{x^3+2x^2-1}$

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^{3-4}}{x^2+5x^3}$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-1}$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{1+2x^2}$

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x^3}{x^4+x^5}$

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^5}{x^2+x^2}$

14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-x^2}{x^2+3x}$

15) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x^2+x}$

16) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2+3x}{7x^3+6x}$

17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2+x}{7x^2-x}$

18) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+2x}{x^2+x}$

2.4 Производя деление и умножение функции на сопряженное выражение, вычислите пределы следующих функций:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$
5. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$
6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$
7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{2x+5}-3}$
8. $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$
11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$
12. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}\right)$
13. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$
14. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2+x}\right)$
15. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt{x}-2}$
16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-6}+2}{x^4+8}$

2.5 Используя замечательные пределы, вычислите:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{10x}$;
2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;
3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x/2}{x}$;
4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$;
5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$;
6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$;
7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$;
8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$;
9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^3}$;
10) $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{ctg}\,3x$;
11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;
12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\sin x}{x^2}$

3. Производная функции.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале x_0 и x-2 произвольных значения аргумента из этого интервала.

- <u>Производной функции</u> $f(x)$ <u>в точке</u> x_0 называется $\lim$ отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Процесс нахождения производной функции называется дифференцированием.

Физический смысл производной:

$S(t)$ - пройденный путь

$\upsilon = S'(t)$ - мгновенная скорость

Биологический смысл производной:

$P(t)$ - число особей в популяции.

$P'(t)$ - скорость роста популяции.

Химический смысл производной:

$x(t)$ - масса вещества в зависимости от времени t.

$x'(t)$ - скорость химической реакции.

Основные правила дифференцирования.

1.$(k' \cdot f(x)' = k \cdot f'(x)$

2.$(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$

3.$(u \cdot \upsilon)' = u'\upsilon + u\upsilon$

4.$(\frac{u}{\upsilon})' = \frac{u'\upsilon - u\upsilon'}{\upsilon^2}$

Таблица производных:

y	C	kx	x^{α}	e^x	$\ln x$	$\sin x$	$\cos x$	tgx	$ctgx$	$arcsinx$	$arctgx$	$arcctgx$
y'	0	k	$\alpha \cdot x^{\alpha-1}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	-$\frac{1}{1+x^2}$

Пример1:

1)$y' = (x^6 + \sin x)' = 6x^5 + \cos x$

2)$y' = (\frac{3x}{x^2+1})' = \frac{3 \cdot (x^2+1) - 3x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3(x^2+1) - 6x^2}{(x^2+1)^2}$

Производная сложной функции.

Пусть задана функция $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$ такая функция называется <u>сложной</u> (функцией от функции).

Правило: производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$ равна произведению производной функции по промежуточной переменной $f'(u) = y_u'$, и производной функции по независимой переменной u_x'.

$y' = y_u' \cdot u_x'$

Пример2:

$$y = \underbrace{\sin(x^2+3)}_{u} = \sin u$$

$$y' = (\sin u)' \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2+3) \cdot 2x$$

Задача:

Пусть популяция в момент t насчитывает **p(t) =3000+100**t^2 особей:

Найти скорость роста популяции: а) В произвольный момент t.

б) В момент t=1с

Решение:

Для нахождения скорости роста популяции находят производную функции:

p′(t)=200 t

Скорость роста популяции в произвольный момент v=200 t

Скорость роста популяции в момент t=1с равна p′(1)=200;

Ответ: v=200 t, v=200(особ/с).

Задачи для самостоятельного решения.

3.1 Найти производную функции:

1) y = $\frac{3}{4}ax^4$;

2) y = $x^3 + 2x^2 + 8$;

3) y = $\frac{2}{x} + \frac{x}{2}$;

4) y = $2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$;

5) y = $-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$;

6) y = $x^4 - \frac{1}{x}$;

7) y = $\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{8}$;

8) y = $\frac{x^3}{3} - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 2$;

9) y = $(1-3x^2)(1-x)^3$;

10) y = $(2x-1)(x^2-1)$;

11) y = $\sqrt[4]{x^3} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \cos x$;

12) y = $\frac{3}{4}x^3 - \frac{2}{\sqrt{x}} + 5^x$;

13) y = $2^x - \sqrt[5]{x}$;

14) y = tg x + ln x + $\frac{x^4}{4}$;

15) y = tg x – ctg x;

16) y = x – sin x;

17) y = ln x + $\frac{2}{\sqrt{x}}$;

18) y = $e^{ч} \cos x$;

19) y = sin x lnx;

20) y = sinx cosx;

21) y = x lnx;

22) y = $a^{ч}\sqrt{x}$;

23) y = $\sqrt{x}\ln x$;

24) y = 3tgx ctgx;

25) y = $5a^x\sqrt[8]{x}$;

26) y = $4a^x\sqrt{x^3}$;

27) y = $\frac{4}{x^2+1}$;

28) y = $\frac{x^2}{2-x}$;

29) y = $\frac{x^2-4}{x^2+4}$;

30) y = $\frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$;

31) y = $\frac{2x^2+3}{4+x^3}$;

32) y = $\frac{x^3}{1-4x}$;

33) y = $\frac{1-x}{x-1}$;

34) y = $\frac{2x^2-3x+4}{\sqrt{x}}$;

35) y = $\frac{x^2}{2-x^2}$;

36) y = $\frac{\sqrt{x^3}}{1-4x}$;

37) y = $\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2}$;

38) y = $\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$;

39) y = $\frac{5x^4-2x^3+3x^2}{\sqrt[3]{x}}$;

40) y = $\frac{e^x}{2x}$;

41) y = $\frac{12\cos x}{1-\sin x}$;

42) y = $\frac{e^x}{x^2}$;

43) y = $\frac{tgx+ctgx}{\sin x}$;

44) y = $\frac{x^3}{\ln x}$;

45) y = $\frac{2x^2=\ln x}{2}$;

46) y = $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$;

47) y = e^{3x};

48) y = cos2x;

49) y = $\sin^2 x$;

50) y = $\sin x^2$;

51) y = e^{x2};

52) y = $\ln(x^2+1)$;

53) y = $a^{\sqrt{x}+x}$;

54) y = $e^{\sin x}$;

55) y = $\sqrt{\ln x}$;

56) y = 2 ctg $\frac{1}{x}$;

57) y = ln(lnx);

58) y = $e^{-\frac{1}{x^2}}$;

59) y = sin(lnx);

60) y = ln(cosx);

61) y = $(x^2-3)^5$;

62) y = $\sqrt[5]{(4x^2-3x+1)^3}$

3.2 Размер популяции насекомых в момент t задается величиной
P(t)=10000+9000(1+t) ^{3} **.**
Вычислите начальную популяцию P(0) и скорость роста в момент t=1.

3.3 Зависимость между количеством (x) вещества, получаемого в некоторой химической реакции и временем (t) выражается уравнением $X = A\ell^{-kt}$**.** Определите скорость реакции в момент времени t.

3.4 Размер популяции бактерий в момент t (время выражено в часах) задается формулой $P(t)=10^6+10^4t-10^3t^2$ Найдите скорость роста популяции когда:
а) t=1час, б) t=5час.

3.5 Смещение нагрузки в ответ на одиночное мышечное сокращение описывается уравнением $X = t\cdot\ell^{\frac{-t^2}{2}}$ Найдите скорость и ускорение мышечного сокращения.

3.6 Формулу комплекса потенциалов, возникающих при возбуждении сетчатки глаза светом (электроретинограмма), можно выразить уравнением:
u=r·sin(-3.05·10^{-3}·t^3+5.6·10^{-2}·t^2+1.59·10^{-1}·t), где r- постоянная, t-время. Определить скорость изменения потенциала (u) в начальный момент времени t=0.

3.7 Растворение лекарственных веществ из таблеток подчиняется уравнению $\mathbf{C=C_0 \cdot e^{-кt}}$, где **С**- количество лекарственного вещества в таблетке, оставшееся к времени растворения t , **к**-постоянная скорости растворения. Определить скорость растворения лекарственных веществ из таблеток.

3.8 Колебания камертона происходят по закону: $\mathbf{X= 0.2 \cdot A \cdot \sin 800\pi t}$. Определить максимальные: скорость и ускорение конца ветви камертона.

4. Исследование функции на экстремум

Исследование функции с помощью производной основано на связи между поведением функции и свойствами её производной.

❖ Точки, в которых $f'(x)=0$ или не существует называются <u>критическими</u>.

Критические точки разбивают область определения на интервалы, на каждом из которых производная сохраняет свой знак.

Если при переходе через критическую точку x_0 производная меняет знак «+» на «-», то x_0 - точка max.

Если при переходе через критическую точку x_0 производная меняет знак «-» на «+», то x_0 - точка min.

Алгоритм исследования функции на экстремум:

4. Найти область определения функции D_f.
5. Найти производную функции y'.
6. y'=0, найти критическую точку функции.
7. Установить знак производной в каждом интервале.
8. Определить точки max и min.

Пример:

$$y = 2x^2 - x^4$$
$$1) D_f = k$$
$$2) y' = 4x - 4x^3$$
$$3) y' = 0$$
$$4x - 4x^3 = 0$$
$$4x(1 - x^2) = 0$$
$$x_1 = 0, x_{2,3} = \pm 1$$

Начертив прямую области определения, определяют знаки производной в каждом интервале и делают вывод. Х=±1 –т.max, Х=0 –т.min

Задача:

Исследовать на наибольшее и наименьшее значения производственную функцию, отражающую зависимость урожая кукурузы (у) (ц/га) от количества азотного удобрения (х) (кг/га). Функция имеет вид: $\mathbf{y=-0{,}0021x^2+0{,}936x+49{,}84}$

Решение:

1. Областью определения данной функции является интервал$[0,\infty)$.
2. Графиком функции является парабола, обращённая ветвями вниз. Поэтому функция имеет один экстремум-максимум.
3. Находят производную от данной функции:

$$y'=-0{,}0042x+0{,}936$$

4. Приравнивают производную к нулю и находят корни уравнения:
$0,0042x+0,936=0$ $x=222,86$- точка максимума.

5. Рассчитывают максимальную урожайность кукурузы:
$y(222,86)=-0,0021(222,86)^2+0,936\cdot222,86+49,84\approx154$(ц/га).

Ответ: При количестве азотного удобрения 222,86(кг/га) урожай кукурузы (ц/га) максимален.

Задачи для самостоятельного решения.

4.1 Определить интервалы убывания и возрастания функции:

1. $y = x^3+3x^2+3x+1$ 2. $y = 3x-3x^2$ 3. $y = x^2+x-1$ 4. $y = x^2-5x+6$ 5. $y = x-e^x$ 6. $y = x\cdot\ln x$	7. $y = x-e^x$ 8. $y = x\cdot\ln x$ 9. $y = 2x^2-x^4/4$ 10. $y = x^3/6-x^2$

4.2 Исследовать функцию на экстремум:

1. $y = x^2+x+1$ 2. $y = 2x^3$-6x2-18x+7 3. $y = x^3/3-2x^2+3x-1$ 4. $y = 2x^2-x^4$ 5. $y = x^4-8x^2+8x$	6. $y = 1+x^2-x^4/2$ 7. $y = 3x-x^3$ 8. $y = x^3-6x^2+9x-4$ 9. $y = \dfrac{X}{X^2+1}$

4.3 В питательную среду вносят популяцию из 1000 бактерий. Численность популяции возрастает согласно уравнению $P(t) = 1000 + \frac{1000t}{100+t^2}$, где t выражается в часах. Найти максимальный размер этой популяции.

4.4 Реакция организма на введенное лекарство может выражаться в повышении кровяного давления, уменьшении температуры тела и других физиологических показателей. Степень реакции зависит от дозы лекарства. Предположим, что (x) обозначает дозу назначенного лекарства, а степень реакции (y) описывается функцией **$y=x^2(5-x)$**. При каком значении x реакция максимальна?

4.5 Зависимость между урожаем озимой пшеницы (y) (ц./га.) и нормой посева семян x (млн. зер./га.) выражается функцией **y=5,6+8.1x-0.7x .** Найдите оптимальную норму посева семян для того, чтобы получить максимальный урожай.

4.4 Скорость роста (у) популяции (х) задана формулой **$y=0.001x(100-x)$.** При каком размере популяции эта скорость максимальна? Какова равновесная популяция, т.е. популяция для которой скорость роста равна нулю?

5. Дифференциал функции.

Задача:

Закон накопления сухой биомассы у винограда определяется уравнением **$Y=0.3X-0.0004X^2$** где X-число дней от распускания почек, Y-накопление биомассы в кг на 1 куст. Как изменится сухая биомасса куста при изменении X от 50 до 60 дней?

Дано:

$Y=0.3X-0.0004X^2$

$X_1=50$

$X_2=60$

$\Delta y=?$

Решение:

Изменение биомассы-это приращение биомассы, его заменяют дифференциалом:

$\Delta y \approx dy=(0.3X-0.0004X^2)'dx=(0.3-0.0008X)dx$.

Находят $dx=x_2-x_1$ $\quad dx=60-50=10$

Находят $\Delta y=(0.3-0.0008\cdot 50)\cdot 10=2.6$(кг)

Ответ: $\Delta y=2.6$ (кг)

Задачи для самостоятельного решения.

5.1 Опытным путем установлено, что массу животного при установившемся режиме кормления можно считать функцией времени откорма t: **$P=5t^2$** Найти привес животного за 10 дней, начиная с 64-го дня кормления.

5.2 Зависимость между возрастом коров (x) и суточным удоем (y)л выражается функцией: **$y=-9.53+6.86x-0.49x^2$.** Как изменится среднесуточный удой коров, если возраст их увеличится с 3 до 5 лет?

5.3 Урожай сахарной свеклы (т/га) в зависимости от количества вносимых минеральных удобрений (ц/га) выражается: **$y=5.4x-2.9$.** Подсчитайте приближенно, как изменится урожай сахарной свеклы, если количество вносимых удобрений увеличить с 4 до 6 ц/га.

6. Функции многих аргументов. Частные производные. Полный дифференциал функции.

До этого мы рассматривали функцию одной переменной $y = f(x)$, но существуют ещё функции нескольких переменных $u = f(x, y, z)$

Например: $u = xy^2 + 3z$

- Если один из аргументов, например x изменяется от x_0 до x, а другие остаются неизменными, то приращение функции: $\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)$ называется <u>частным приращением по x</u>.

Аналогично по y, z.

Для функции нескольких переменных, вводится понятие частных производных по x u_x', по y u_y', по z u_z' или $\frac{du}{dx}; \frac{du}{dy}; \frac{du}{dz}$.

- $\lim$ отношения частного приращения функции по x к Δx при $\Delta x \to 0$ называется частной производной функции по x, т.е.

$$u_x' = \frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y.z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

- <u>Полным дифференциалом</u> функции $u = f(x, y, z)$ называется сумма дифференциалов функции по каждому аргументу x, y, z, т.е.

$$du = u_x' \cdot dx + u_y' \cdot dy + u_z' \cdot dz$$

Пример 1: Найти изменение объема прямоугольного параллелепипеда, если длина его ребер увеличилась от 2; 3 и 4 см до 2,01; 3,005 и 4,05 см соответственно.

Дано:

x_1=2см;y_1=3см;z_1=4см

x_2=2,01см;y_2=3,005см;z_2=4,05см

Найти:

ΔV=?

Решение:

Выразим объем прямоугольного параллелепипеда как функцию 3-х переменных V=x·y·z, тогда ΔV=$V_x' \cdot dx + V_y' \cdot dy + V_z' \cdot dz$

$dx = 0{,}01$

$dy = 0{,}005$

$dz = 0{,}05$

$\Delta V = 3 \cdot 4 \cdot 0{,}01 + 2 \cdot 4 \cdot 0{,}005 + 2 \cdot 3 \cdot 0{,}05 = 0{,}46 cì^3$

Задачи для самостоятельного решения.

6.1 Найти частные производные функции:

1. $f(x,y)= x^2 \sin y$
2. $f(x,y)= x^2 + y^3$
3. $f(x,y)= \frac{x-y}{x+y}$
4. $f(x,y)= y \cdot \ln x$
5. $f(x,y)= y - e^x$
6. $f(x,y)= 1/(x+y)$
7. $f(x,y)= e^{2x+y}$
8. $f(x,y)=x^2 + xy + y^2$
9. $f(x,y)= e^{xy}$

6.2 Зависимость объема V газа, масса которого постоянна, от температуры T и давления P выражается формулой $V=\frac{RT}{P}$, где R- постоянная. Найти $\frac{\partial V}{\partial T}$; $\frac{\partial V}{\partial P}$.

6.3 Реакция организма на введение лекарственного препарата описывается функцией: $y = x^2(a-x)\cdot t\cdot e^{-t}$, где t- время с момента введения лекарственного препарата, x – доза лекарственного препарата. Найти $\frac{\partial y}{\partial x}$ $\frac{\partial y}{\partial t}$. При каком значении t для заданной дозы лекарственного препарата реакция организма достигнет максимума?

6.4 При лечении некоторого заболевания одновременно назначается два препарата. Реакция организма на дозу X первого препарата и дозу Y второго препарата описывается зависимостью $f(x,y)= x^2y^2(a-x)(b-y)$, где a и b- постоянные. Определить дозу Y второго препарата? Определить дозу Y второго препарата, которая вызовет максимальную реакцию при фиксированной дозе X первого препарата.

6.5 Реакция организма на дозу X лекарственного препарата спустя t часов после приема описывается зависимостью $f(x,y)= x^2(a-x)t^2e^{-t}$, где a -постоянная. При какой дозе X реакция организма окажется максимальной и когда она наступит?

6.6 Найти полный дифференциал функции:

1. $f(x,y)= xy^3-3x^2y^2+2y^4$
2. $f(x,y)= \sin(xy)$
3. $f(x,y)= \ln(xy)$
4. $f(x,y)= \sqrt{x^2+y^2}$
5. $f(x,y)= e^{3x-y}$
6. $f(x,y)= x+y - \sqrt{x^2+y^2}$ при x = 3, y = 4, dx = 0,1, dy = 0,2
7. $f(x,y)= x^2 + y^2$ при x = 2, y = 3, dx = 0,2, dy =0,03

7. Неопределенный интеграл.

Нахождение неопределенного интеграла называют интегрированием функции.

❖ Совокупность первообразных $F(x)+C$ для данной функции называется неопределенным интегралом.

Обозначается: $\int f(x)dx = F(x)+C$

$f(x)$ - называется подынтегральной функцией.

$f(x)dx$ - называется подынтегральной выражением.

C - постоянная интегрирования.

Таблица основных интегралов:

1. $\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+C$

3. $\int e^{x}dx = e^{x}+C$

4. $\int \sin xdx = -\cos x + C$

5. $\int \cos xdx = \sin x + C$

6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

5. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = -arcctgx + C_1$

Простейшие способы интегрирования.

а) непосредственное интегрирование заключается в использовании свойств неопределенного интеграла и приведение к табличному виду.

Пример1: $\int (2x^2+6x-7)dx = \int 2x^3dx + \int 6xdx - \int 7dx = 2\frac{x^4}{4}+6\frac{x^2}{2}-7x+C$

б) интегрирование подстановкой (заменой переменных) заключается в переходе от данной переменной интегрирования к другой для упрощения подынтегральной функции.

$\int f(x)dx$ сделаем подстановку $x=\varphi(u)$ $f(x) = f(\varphi(u)); dx = \varphi'(u)\cdot du$

$\int f(x)dx = \int f(\varphi(u))\cdot\varphi'(u)\cdot du$

Пример 2: $\int e^{3x+5}dx$; введем новую переменную $u=3x+5$, тогда

$du = u'\cdot dx = 3dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3}$

$\int e^{3x+5}dx = \int e^{u}\frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int e^{4}du = \frac{1}{3}e^{4}+C = \frac{1}{3}e^{3x+5}+C$

в) интегрирование по частям.

Формула интегрирования по частям:

$\int ud\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du$

этот способ применяется, если интеграл упрощается.

Пример 3: $\int \underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin dx}_{d\vartheta} = x\cdot(-\cos x) - \int -\cos xdx = -x\cos x + \sin x + C$

$u = x;\quad du = dx$

$d\vartheta = \sin xdx$

$\vartheta = (d\vartheta) = \int \sin xdx = -\cos x + C$

Пример 4:

Скорость роста популяции насекомых $\upsilon = t + t^2$. При t=0 число особей в популяции равно 10 000. Определить численность популяции спустя 3 дня.

Дано:

$\upsilon = t + t^2$

t=0, P=10 000

Найти:

P(3)=?

Решение:

$$P = \int \vartheta dt = \int (t + t^2)dt = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + C$$

так как P(0)=10 000, то C=10 000

P(3)=$\frac{3^2}{2} + \frac{3^3}{3} + 10000$=10013,5≈10014 (особей)

Ответ: P(3)≈10014 (особей)

Задачи для самостоятельного решения.

7.1 Вычислить неопределенные интегралы:

1) $\int \sqrt{2x-3}\,dx$;

2) $\int \cos 3x dx$;

3) $\int e^{2x+1}dx$;

4) $\int (e^x + e^{-x})dx$;

5) $\int (x+1)^{3/2}dx$;

6) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$;

8) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+2}}$;

9) $\int \frac{x^3dx}{(x^4-2)^3}$;

10) $\int x\sqrt{a^2+b^2x^2}dx$;

11) $\int \frac{2dx}{3-4x}$;

12) $\int x\sqrt{x^2+1}dx$;

13) $\int x\sqrt{1-x^2}dx$;

14) $\int x^2(x^3+9)^3dx$;

15) $\int \frac{xdx}{2x^2+3}$;

16) $\int \frac{x^6dx}{(x^7-2)^2}$;

17) $\int \frac{adx}{a-x}$;

18) $\int e^{x^2}xdx$;

19) $\int \frac{e^x+1}{e^x}dx$;

20) $\int e^x\sqrt{1+e^x}dx$;

21) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$;

22) $\int \frac{2e^x}{(2+e^x)^2}dx$;

23) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[x]{e}}$;

24) $\int e^{2x+3}dx$;

25) $\int \cos 3x dx$;

26) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$;

27) $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$;

28) $\int (\sin\frac{x}{2} + \cos 2x)dx$;

29) $\int \frac{dx}{\cos^2(1-2x)}$;

30) $\int x^2 \sin 3x^3 dx$;

31) $\int \sin^2 x \cos x dx$;

32) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$;

33) $\int e^{\cos x}\sin x dx$;

34) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x}dx$;

7.2 Скорость роста популяции насекомых $\upsilon = t + t^2$ (где t выражается в днях). При t=0 число особей в популяции равно 10 000. Определить численность популяции спустя: 1) 1 день; 2) 5 дней; 3) 10 дней.

7.3Скорость роста числа бактерий задается формулой
$\upsilon = 10^4 - 2\cdot 10^3 t$. Составить уравнение роста числа бактерий x(t), если при t = 0 $x(0)=10^6$.

7.4Скорость растворения лекарственного вещества из таблетки $\upsilon = -c_0 kFe^{-kFt}$, где c_0 - концентрация лекарственного вещества при $t = 0, k$ - постоянная растворения, F - площадь поверхности растворяемого вещества в единице объема. Составить уравнение растворения лекарственного вещества, если при $t = 0$ $c = c_s - c_0$, где c_s - концентрация насыщения.

7.5 Скорость движения кисти руки задана уравнением $\upsilon = \frac{1}{2}t^2 + 3$. Найти уравнение движение кисти, если за первые 6с было пройдено 40см.

8. Определенный интеграл.

Определенный интеграл, его смысл.

Дана неотрицательная функция $y = f(x) > 0$

Фигура ограниченная графиком функции $y = f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью OX называется <u>криволинейной трапецией</u>.

❖ Предел интегральной суммы называется определенным интегралом.

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$, a, b - пределы интегрирования

Геометрический смысл:

Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции ограниченной графиком функции $f(x)$, прямыми $x = a, x = b$ и осью OX.

Формула Ньютона-Лейбница.

Для вычисления определенного интеграла используется формула Ньютона-Лейбница:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ - первообразная, а $F(b) - F(a)$ - приращение первообразной.

Пример 1: $\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$

Применение определенного интеграла:

1. Вычисление площади криволинейной трапеции

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

2. Определение работы переменного силы

$A = \int_0^S f(S)dS$, работа переменной силы численно равна интегралу от силы, взятой по пути S.

8.1 Вычислить определённые интегралы:

1. $\int_0^1 e^x dx$	4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$
2. $\int_{-2}^3 (2x^3 + x^2 - 5)dx$	5. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$
3. $\int_2^8 \frac{2+x}{x}dx$	6. $\int_1^2 x^3 \ln x dx$

8.2Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривой y = cos x и осью Ох, в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

8.3 Реакция организма на определенную дозу лекарственного препарата f(t) = $3t^2$-2t в момент времени t. Определить суммарную реакцию на данную дозу за первые 5 с.

8.4Тело движется в некоторой среде прямолинейно по закону S= t^2. Сопротивление среды пропорционально квадрату скорости движения. Вычислить работу, произведенную силой сопротивления среды при передвижении тела от S=0 до S=a.

8.5 В момент времени t скорость изменения концентрации препарата с изотопным индикатором $\upsilon = e^{-t\ln 2}$. Найти концентрацию препарата в момент времени t.

8.6 Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:

1) $y=4-x^2$, y=0;
2) $y=3-2x-x^2$? y=0;
3) y=Inx, y=0, x=e
4) $y=x^2-2$, $y=6-x^2$
5) $y=\frac{2}{x}$, y=0, x=1, x=4;
6) $y=x^2$, $y=2-x^2$;
7) $y=x^2+4x$, y=x+4;
8) $y=6x-x^2$, y=0;
9) $y=x^3$, y=8, x=0;
10) $y=2^x$, y=2, x=0;
11) y=5x, y=0, x=2;
12) y=3x-1, y=0, x=2, x=4;
13) $y=x^3$, y=2x;
14) $y=4(1-x^3)$, y=0, x=0;
15) $y=x^2-x$, y=0, x=2, x=0;
16) $2x^2$, y=0, x=2, x=4;
17) $y=x^2-x$, y=0;
18) $y=2x-x^2$, y=x;

19) $y=\frac{x^2}{2}$, y=4-x;
20) $y=x^2$, $y=1-x^2$;
21) y=4x-5, y=0, x=-3, x=-2;
22) $y=2x^2+2x$, y=0, x=0, x=3;
23) $y=x^3$, x=2, x=3;
24) $y=x^2$, y=x;
25) y=sinx, y=0, x=0, $x=\pi$;
26) $y=e^{-x}$, y=0, x=1, x=2.

8.7 Найдите интегралы методом интегрирования по частям:

1) $\int x \cos x \, dx$;
2) $\int x \cos 3x \, dx$;
3) $\int x \, \text{Inx} \, dx$;
4) $\int xe^x \, dx$;
5) $\int x^2 \sin 2x \, dx$;
6) $\int x^3 \text{Inx} \, dx$;
7) $\int xe^{-x} \, dx$;
8) $\int x^2 e^{-2x} \, dx$;
9) $\int \left(\frac{Inx}{x}\right)^2 dx$;
10) $\int x \sin x \, dx$;

9. Дифференциальные уравнения. Применение дифференциальных уравнений для моделирования медико-биологических процессов.

Уравнение связывающее независимую переменную, функцию этой переменной, ее производные или дифференциалы называется **дифференциальным уравнением.**

Если функция зависит от одной переменной, то диф.уравнение называется **обыкновенным**.

Пример: y'=2x
$y'=3x^2+5x-8$

Порядок старшей производной, входящей в диф.уравнение называется порядком уравнения.

Решением диф.уравнеия называется функция определенная на множестве D,при подстановке которой в диф.уравнение получаем тождество на множестве D.

Из множества решений диф.уравнения 1-го порядка можно выделить одно, задав условие при $x=x_0$, $y=y_0$ это называется начальным условием.

❖ График решения диф.уравнения называется интегральной кривой ,а множество графиков решений называется семейством интегральных кривых.

Уравнение с разделенными переменными.

Имеет вид P(x)dx +Q(y)dy = 0

Решение: $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = c$ -общий интеграл уравнения с разделенными переменными.

Пример 1: **xdx+ydy=0**

$$\int xdx + \int ydy = c$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

$x^2+y^2=c_1$ -это общее решение.

Уравнение с разделяющимися переменными.

Имеет вид P(x)N(y)dx +Q(y)M(x)dy = 0

Решение : P(x)N(y)dx +Q(y)M(x)dy = 0 $|:N(y)\neq 0$

$:M(x)\neq 0$

$$\frac{P(x)}{M(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0 \qquad \int\frac{P(x)}{M(x)}dx + \int\frac{Q(y)}{N(y)}dy = c$$

Пример 2:

1) $x(y^2+5)dx+y(x^2+7)dy=0 \quad |: y^2+5\neq 0$

$: x^2+7\neq 0$

$$\frac{xdx}{x^2+7} + \frac{ydy}{y^2+5} = 0$$

$$\int\frac{2xdx}{x^2+7} + \int\frac{2ydy}{y^2+5} = 0$$

$\ln|x^2+7|+\ln|y^2+5|=\ln C$

$(x^2+7)(y^2+5)=c_1$ –общее решение уравнения.

Задача:

Концентрация лекарственного вещества в крови человека уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если через 2 часа концентрация была равна 0,6 мг/л, а через 4 часа уменьшилась в 3 раза.

Дано:

t_1=2с

t_2=4с

C_1=0,6 мг/л

C_2=0,2 мг/л

Найти: C(t)=?

Решение:

Скорость изменения концентрации и концентрация С в любой момент времени *t* связаны соотношением: dC/dt=-kC, где *к* - коэффициент пропорциональности, который не зависит от времени. Знак «-» поставлен потому, что концентрация убывает с течением времени.

Решают это уравнение 1-го порядка методом разделения переменных: dC/dt=-kC

Разделяют переменные: dC/C=-kdt

Интегрируют полученное выражение и получают:

$LnC=-kt+LnC_o \qquad LnC - LnC_o = -kt$

Разность логарифмов равна логарифму частного:

$Ln\frac{\tilde{N}}{\tilde{N}_0}$ =-kt или $\boxed{C=C_oe^{-kt}}$ -общее решение

Подставляя сюда концентрацию при $t = 2$ и t=4,

Получают 2 уравнения: $0{,}6=C_oe^{-2k}$,

$0{,}2=C_oe^{-4k}$

Решают систему уравнений почленным делением правой и левой частей уравнений и получают:

$3=e^{2k}$ $(e^k)^2=3$ $e^k=\sqrt{3}$

Логарифмируют полученное уравнение: k Lne=Ln√3 и получают к=0,53

Выражают C_o из первого уравнения $0{,}6=C_oe^{-2k}$

и получают C_o=0,6*3=1,8 мг/л.

Закон изменения концентрации: $C(t) = 0{,}2\ e^{-kt}$ (мг/л)

Ответ: $C(t) = 1{,}8\ e^{-0{,}53t}$

Задачи для самостоятельного решения.

9.1 Найдите общие решения дифференциальных уравнений:

1. $y' = 2x^2$	9. xdx=ydy
2. $y' = 2x^2 + 1$	10. y' =y cosx
3. y' =5 y	11. y' =2xy
4. xyy' =0.5	12. dy+3ydx=0
5. 3xdy=2ydx	13. $e^y\ y'=1$
6. $4x-3y^2y' = 0$	14. $e^x\ y'=1$
7. (x+1)dx-2xydy=0	15. $y'=1/x+e^x$
8. y' (x+1)=1	

9.2 Найдите частные решения дифференциальных уравнений:

1. $ydy - xdx = dx$, если y = О при $x = 2$;
2. $y'=\frac{1}{x}+x^2$, если $y = 1 + \frac{\ell^3}{3}$ при x = e;
3. 2xy' = y, если y = 6 при x = 9;
4. sin xdx =dy, если y= 1 при $x=\frac{\pi}{3}$
5. $3y^2y' = y^3 + 1$, если y = 2 при x= 0;
6. (x+1)dy = ydx, если y = 8 при x = 1.

9.3 Решить линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка:

1. $xy' + y=3x^2$
2. $y' – 2y/x=5x^3$
3. $x^2y' = y(x+y)$
4. $y' – 2y/x= -2x$
5. $xy' +3y =x^2$

6. $y' + 4y = 7$

9.4 Найти частное решение линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1. $y'-2y=1$ $\quad x=0, y=1/2$
2. $y'-3y/x=x$ $\quad x=1, y=1$
3. $2y'-y=e^x$ $\quad x=0, y=5$
4. $x^2y'+2xy= - 4$ $\quad x= -1, y=0$

9.5 Счетчик Гейгера, установленный вблизи радиоактивного изотопа серебра, при первом измерении зарегистрировал 5200-частиц в минуту, а через 24 часа только 300. Найдите закон изменения числа ядер серебра с течением времени при условии, что скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству не распавшегося вещества. Определите период полураспада изотопа.

9.6 Найдите закон роста палочковидных клеток с течением времени, если скорость роста клетки пропорциональна ее длине L $\frac{dL}{dt} = (a-b)L$, где a и b - параметры, характеризующие условия роста клеток; L=Lo при t=0.

9.7 Скорость сокращения мышцы описывается уравнением: $\frac{dx}{dt} = b(x_0 - x)$,

где x_0 –абсолютная сила мышцы;

b -постоянная величина, зависящая от нагрузки;

x -сокращение мышцы в данный момент.

Найдите закон сокращения мышцы, если x=0 при t=0.

9.8 Скорость распада некоторого лекарственного вещества пропорциональна его наличному количеству. В результате анализа установили, что через 1 час после инъекции в организме осталось 31.4г лекарственного вещества, а по истечении 3 часов- 9.7г. Определите, сколько лекарственного вещества было введено в организм?

9.9 При брожении скорость прироста действующего фермента пропорциональна его количеству. Через 1ч после брожения масса фермента составила 6г, а через 3 часа-8г. Найдите массу фермента до начала брожения.

9.10 При непрерывном внутрисосудистом введении лекарственного препарата с постоянной скоростью **v** изменение его в крови описывается уравнением dm/dt=v-km. Где k – постоянная удаления препарата из крови. Определить зависимость количества лекарственного препарата в крови от времени при условии, что при t=0 m(0)=0

9.11 Если первоначальное количество фермента равно 1г, а через 1ч становится равным 1,2г, то чему оно будет равно через 5ч после начала брожения? Скорость прироста фермента считать пропорциональной его наличному количеству.

9.12 Найдите закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 час после введения 10 *мг* препарата его масса уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме через 2 часа? Скорость выведения лекарственного препарата из организма человека считать пропорциональной его наличному количеству.

9.13 Уменьшение интенсивности света при прохождении через поглощающее вещество пропорционально интенсивности падающего света и толщине поглощающего слоя. Найдите закон убывания интенсивности света, если известно, что при прохождении слоя равного 0,5 м интенсивность света убывает в 2 раза.

9.14 Скорость роста числа микроорганизмов пропорциональна их количеству в данный момент. В начальный момент имелось 100 микроорганизмов и их число удвоилось за 6 часов. Найти зависимость количества микроорганизмов от времени и количество микроорганизмов через сутки.

II. Теория вероятностей.

10. Вероятность случайного события.

Событие называется случайным, если в результате данного испытания оно может либо произойти, либо не произойти. Обозначение А, В, С….
Пример: в ящике цветные шары. Вытаскивают 1 шар – это испытание, появление шара определенного цвета – событие.
Чем больше количество этих событий, тем отчетливее проявляются закономерности, и тем более достоверно может быть предсказан результат. Эти закономерности называется статистическими, они имеют объективный характер, присущий всем явлениям внешнего мира.

- **Классическая вероятность** P(A) события А –это отношение числа благоприятствующих этому событию исходов m, к общему числу всех элементарных событий n.

$$\mathbf{P(A)} = \frac{m}{n}$$

- **Статистическая вероятность** $P^*(A)$ события А – это предел отношения числа испытаний, в котором событие А произошло, к общему числу испытаний.

$$\mathbf{P^*(A)} = \lim_{n\to\infty}\frac{m}{n}$$

Алгебра событий.

а) теорема сложения вероятностей

Суммой двух событий А и В является событие, которое заключается в появлении события А или В.

Если события несовместимы, то вероятность появления одного из двух событий равна сумме вероятностей этих событий и определяется по формуле: **P(A + B)= P(A) + P(B)**

Следствия:

1. Сумма вероятностей событий A_1, A_2....образующих полную группу равна единице.

   $P(A_1) + P(A_2) + \ldots P(A_n) = 1$

2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

   $P(A) + \overline{P(A)} = 1$

Задача: В ящике 4 белых + 2 красных + 8 зеленых + 3 черных. Извлекают 1 шар, какова вероятность, что шар цветной?

Решение: $P(A+B+C) = \frac{13}{17}$

Задача:

Аптека получает медикаменты из пункта А, В, С. Вероятность поступления лекарства из А=0,7 , из В=0,2. Найти вероятность того, что медикаменты получены из С.

Решение:

События образуют полную группу $0{,}7+0{,}2+P(C)=1 \rightarrow P(C)=0{,}1$

Если события совместимы, то вероятность появления хотя бы одного из двух этих событий равна сумме вероятностей без вероятности их совместного появления.

P(A + B)= P(A) + P(B) – P(A·B)

Задача: : Из колоды карт вытаскиваем 1 карту, какова вероятность вынимания либо черной масти, либо дамы.

Решение:

n=36 А-событие вынимания черной масти

В- событие вынимания дамы

$P(A+B) = \frac{1}{2} + \frac{4}{36} - \frac{2}{36} = \frac{20}{36}$

б) теорема произведения вероятностей

Произведением двух событий А и В является событие С, которое заключается в одновременном появлении события А и В.

Если события независимые

P(A · B)=P(A) · P(B)

Задача: Медсестра обслуживает в палате 4-х больных. Вероятность того, что 1-му больному потребуется внимание в течении часа =0,2; P(B)=0,3; P(C)=0,25; P(D)=0,1. Найти вероятность что всем больным потребуется помощь.

Решение:

P(A и B и C и D) = 0,2·0,3 ·0,25 ·0,1=0,0015

Если события зависимые:

P(A · B)=P(A) · P(B/A)

P(B/A)-условная вероятность(вероятность события B при условии что событие A уже произошло)

Задача: В ящике 10 шаров(4 белых и 6 черных), вынимают подряд два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

Решение:

P(A · B)=P(A) · P(B/A)= 4/10·3/9=4/30

Вероятность появления хотя бы одного события.

В некоторых случаях вероятность события удобно подсчитывать как вероятность противоположного другому событию.

Пусть события A_1, A_2, A_3 .... A_n независимы и известны вероятности этих событий: $P(A_1)=p_1$, $P(A_2)=p_2$, $P(A_3)=p_3$,.......... $P(A_n)=p_n$,

Обозначим вероятности противоположных событий:

$P(\overline{A}_1) = q_1, \; P(\overline{A}_2) = q_2, \quad P(\overline{A}_3) = q_3, \; ....P(\overline{A}_n) = q_n,$

Найдём вероятность того, что ни одно из событий в опыте не наступит:

$P(B)=q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots\ldots q_n$

В этом случае искомая вероятность, т.е. вероятность появления хотя бы одного события, определяется как вероятность противоположного события:

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - q_1 \cdot q_2, \cdot q_3, \cdot ....q_n,$

Задача: Студент отвечает на 4 дополнительных вопроса при сдаче экзамена. Вероятность правильного ответа на каждый вопрос 1/4. Предполагая, что все ответы — события независимые, найти вероятность того, что будет дано хотя бы два правильных ответа.

Решение: B = *{хотя бы два правильных ответа}* — это 2, 3 или 4.

Так как P(A) = 1/4, то $P(\overline{A})$ = 1 - 1/4 = 3/4 — вероятность неправильного ответа на вопрос. Эту задачу удобно решать, используя противоположные события, т.е. пользуясь равенством:

$P(B)=1-[P_4(0)+P_4(1)]$

$P_4(0)=C^0_4 \cdot P^0 \cdot (1-P)^4=0{,}32$

$P_4(1)=C^1_4 \cdot P^1 \cdot (1-P)^{4-1}=0{,}42$

$P(B)=1-[P_4(0)+P_4(1)]=1-(0{,}32+0{,}42)=0{,}26$

Ответ: P(B)=0,26

Формула полной вероятности и формула Байеса.

Определение: Набор попарно несовместимых событий $H_1, H_2, ...H_n$, сумма которых составляет достоверное событие, называется *полной группой событий*.
Теорема 1(формула полной вероятности).
Пусть события $H_1, H_2, ...H_n$ являются полной группой событий. Тогда для любого события А: $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)$$

Формула Байеса.

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j) \cdot P_{H_j}(A)}$$

где **А** -рассматриваемое событие
H_i- гипотеза
j-количиство гипотез
$P(H_i)$-вероятность i-той гипотезы (доопытная)
$P_{H_i}(A)$- условная вероятность события **А** при соответствующей гипотезе
$P_A(H_i)$- послеопытная вероятность i-той гипотезы

Задача:
Команда на хорошем поле выигрывает с вероятностью 2/3 , а на плохом – с вероятностью ½. Известно, что ¾ игр проводится на хорошем поле. Какова вероятность выиграть в наудачу выбранном матче?
Решение: Введем события А=$\{\textbf{\textit{выигрыш}}\}$,
$H_1 = \{\textit{плохоеполе}\}$,
$H_2 = \{\textit{хорошееполе}\}$.
По условиям задачи: P(A/H_1)=2/3 , P(A/H_2)=1/2,
P(H_1)=3/4 , P(H_2)=1/4$\Rightarrow$
P(A)=2/3*3/4+1/2*1/4=5/8.

Задача:
Установлено, что курящие мужчины в возрасте свыше 40 лет умирают от рака легких в 10 раз чаще, чем некурящие мужчины. В предположении, что 60% этой популяции курящие, какова вероятность того, что мужчина, умерший от рака легких, был курящим?

Решение: Пусть H_1- мужчина курящий, $P(H_1)=0.6$
H_2- мужчина не курящий $P(H_2)=0.4$
А- событие заключающееся в том, что мужчина, умер от рака лёгких.
$P_{H1}(A)=10P_{H2}$-по условию задачи.
Рассчитывают вероятность того, что мужчина, умерший от рака лёгких, был курящий.

$$P_A(H_1) = \frac{0.6 \cdot 10 \cdot P_{H_2}(A)}{0.6 \cdot 10 \cdot P_{H_2}(A) + 0.4 \cdot P_{H_2}(A)} = \frac{6}{6.4} = \frac{15}{16}$$

Рассчитывают вероятность того, что мужчина, умерший от рака лёгких, был некурящий.

$$P_A(H_2) = \frac{0.4 \cdot P_{H_2}(A)}{0.6 \cdot 10 \cdot P_{H_2}(A) + 0.4 \cdot P_{H_2}(A)} = \frac{0.4}{6.4} = \frac{1}{16}$$

Проверка: 15/16 +1/16 =1, следовательно задача решена верно.

Ответ: $P_A(H_1)$=15/16; $P_A(H_2)$= 1/16

Задачи для самостоятельного решения по теории вероятности.

10.1 При обследовании 300 студентов путём флюорографии были выявлены следующие заболевания: у 5 человек- плеврит, у 8-остаточные явления после пневмонии. Найти вероятности этих заболеваний, выявленных с помощью флюорографии.

10.2 Аптечный склад получает медикаменты с медицинских предприятий 3-х городов А, В и С. Вероятность получения медикаментов из города А P(А)=0.6, из города В P(В)=0.3. Найти вероятность того, что медикаменты получены из города С.

10.3 На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. Какова вероятность сорвать в темноте цветную астру, если срывают одну астру?

10.4 В марте 7дней шел снег, 10 – дождь, из них 4дня – снег с дождем. Найти вероятность того, что в наугад выбранный день шел дождь или снег.

10..5 Вероятность хотя бы одного вызова врача в течение часа P=0.7. Найти вероятность того, что в течение часа не последует вызова.

10.6 В большой популяции плодовой мушки 25% мух имеют мутацию глаз, 50%- мутацию крыльев, а 40% мух с мутацией глаз имеют и мутацию крыльев. Какова вероятность того, что у мухи, наудачу выбранной из этой популяции, окажется либо мутация глаз, либо мутация крыльев?

10.7 Медицинская сестра обслуживает в палате четырёх больных. Вероятность того, что в течение часа внимания сестры потребует первый больной - P(А)=0.2, второй больной-P(В)=0.3, третий-P(С)=0.25, четвёртый больной-P(Д)=0.1. Найти вероятность того, что в течение часа все больные потребуют внимания медсестры.

10.8 Представим, что в группе из 10 человек есть четверо мужчин. Если случайным образом выбирают двух человек, то какова вероятность, что:
1) оба-мужчины;
2) обе-женщины;
3) один- мужчина и одна –женщина.

10.9 Вероятность попадания в опухолевую клетку «мишень» первого радионуклида равна P_1=0.7, а второго-P_2=0.8.Найти вероятность попадания в клетку – «мишень», если бы одновременно использовались оба препарата.

10.10 Три врача независимо друг от друга осмотрели одного и того же больного. Вероятность того, что первый врач допустит ошибку при установлении диагноза, равна 0.01. Для второго и третьего врачей эта вероятность соответственно 0.015 и 0.02. Найти вероятность того, что при осмотре хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе.

10.11 В контрольно-аналитической лаборатории имеются три измерительных прибора. Вероятность того, что приборы работают в данный момент времени, равна соответственно p_1=0,8; p_2=0,9; p_3=0,95. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы один прибор.

10.12 В клетке 6 белых и 4 серые мыши. Случайно выбирают 3-х мышей, не возвращая их обратно. Вычислить вероятность событий:

A) все три мыши белые
B) две белые и одна серая
C) две серые и одна белая
D) все три серые

10.13 Эффективность вакцины в формировании иммунитета составляет 75%. Вакцинировалось 2 животных. Найдите вероятность случайных событий:

A) оба животных приобрели иммунитет
B) одно животное приобрело иммунитет
C) ни одно животное не приобрело иммунитет

10.14 Вероятность брака при изготовлении детали равна 0,04. Приемка деталей производится по следующей системе контроля: годная деталь принимается с вероятностью 0,98, а бракованная – с вероятностью 0,1. Найти вероятность приемки детали.

10.15 Имеются три одинаковых ящика с шарами. В первом ящике 30 белых и 20 чёрных шаров, во втором -15 белых и 15 чёрных шаров, в третьем – 5 белых и 15 чёрных шаров. Какова вероятность вытащить из случайно выбранного ящика чёрный шар.

10.16 На автозавод поступили двигатели от трёх моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго-6 и от третьего-4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8 ; 0,7.
Какова вероятность того, что:
а)установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока;
б)проработавший без дефекта двигатель изготовлен на первом заводе, на втором заводе?

10.17 На предприятии, изготавливающем замки, первый цех производит 25, второй 35, третий 40% всех замков. Брак составляет соответственно 5,4 и 2%.
а)Найти вероятность того, что случайно выбранный замок является дефектным.
б)Случайно выбранный замок является дефектным. Какова вероятность того, что он был изготовлен в первом, втором, третьем цехе?

10.18 Трое рабочих изготавливают однотипные изделия. Первый рабочий изготовил 40 изделий, второй - 35, третий - 25. Вероятность брака у первого рабочего 0,03 , у второго - 0,02 , у третьего - 0,01. Взятое наугад изделие оказалось бракованным. Определить вероятность того, что это изделие сделал второй рабочий.

10.19 На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем ¾ продукции с процентом брака 4%, вторая – ¼ продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие:
а)Окажется бракованным;
б)Изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

10.20 В обувную мастерскую для ремонта приносят сапоги и туфли в соотношение 2:3. Вероятность качественного ремонта для сапог равна 0,9, а для туфель – 0,85. Проведена проверка качества одной пары обуви. Оказалось, что эта пара обуви отремонтирована качественно. Какова вероятность того, что а) сапоги, б) туфли?

10.21 Лабораторное животное либо здорово (с вероятностью 0.9), либо нет. Если животное здорово, то оно может выполнить некоторое задание в 75% всех попыток. Если животное нездорово, то оно способно выполнить это задание лишь в 40% всех попыток. Допустим, что предпринимается попытка и животное справилось с заданием. Какова вероятность того, что животное здорово?

10.22 Вакцина формирует иммунитет у животных против туберкулеза в 95% случаев. Вакцинировалось 30% животных. Вероятность заболеть туберкулезом у вакцинированного животного без иммунитета такая же, как у не вакцинированного. Какова вероятность того, что животное, заболевшее туберкулезом, было вакцинировано?

10.23 В некоторой большой популяции число черноволосых и рыжих одинаково. Замечено, что у 30% людей с черными волосами глаза голубые, так же, как и у 50% людей с рыжими волосами. Из тех, у кого черные или рыжие волосы, случайно выбирают одного человека и оказывается, что у него голубые глаза. Какова вероятность того, что у этого человека черные волосы?

10.24 В одной большой частной лечебнице согласно оценкам 50% мужчин и 30% женщин имеют серьезные нарушения сердечной деятельности. В этой лечебнице женщин вдвое больше, чем мужчин. У случайно выбранного пациента оказалось серьезное нарушение сердечной деятельности. Какова вероятность, что этот пациент мужчина?

10.25 Установлено, что в среднем один из 700 детей рождается с лишней Y-хромасомой и что у таких детей крайне агрессивное поведение встречается в 20 раз чаще. Опираясь на эти данные представьте, что у мальчика крайне агрессивное поведение. Какова вероятность, что он имеет лишнюю Y-хромосому?

10.26 Большая популяция людей разбита на 2 группы одинаковой численности. Диета одной группы отличалась высоким содержанием ненасыщенных жиров, а диета контрольной группы была богата насыщенными жирами. После 10 лет пребывания на этих диетах возникновение сердечно- сосудистых заболеваний составило в этих группах 31% и 48%. Случайно выбранный из популяции человек имеет сердечно-сосудистое заболевание. Какова вероятность того, что этот человек принадлежит к контрольной группе?

10.27 Предположим, что в некоторой большой популяции мужчин и женщин поровну. В этой популяции 5% мужчин и 0.25% женщин страдают дальтонизмом. Случайным образом выбирают одного дальтоника. Какова вероятность, что этот человек-мужчина?

10.28 Краснуха может оказаться причиной серьёзных врождённых пороков развития у детей, если мать заболевает ею на ранних стадиях беременности. Вероятность пороков оценивается как 45%, 20% и 5%, если заболевание происходит соответственно на первом, втором и третьем месяцах беременности. Предположим, что вероятность заболеть краснухой одна и та же на любом месяце беременности и что ребёнок рождается с серьёзными пороками по причине краснухи. Какова вероятность, что мать заболела краснухой на первом месяце беременности?

10.29 Некоторое заболевание, встречающееся у 5% населения, с трудом поддаётся диагностике. Один грубый тест на это заболевание даёт положительный результат в 60% случаев, когда пациент действительно болен, и в 30% случаев, когда у пациента нет этого заболевания. Пусть для конкретного пациента этот тест даёт положительный результат. Какова вероятность, что у него есть это заболевание?

10.30 Два автомата производят одинаковые хирургические зажимы. Производительность первого автомата вдвое больше, чем второго. Первый автомат производит в среднем 60% зажимов отличного качества, а второй-84%. Наудачу взятый зажим оказался отличного качества. Найти вероятность того, что он произведён первым автоматом.

11. Случайная величина.

Случайной называется величина, значение которой зависит от случая или стечения обстоятельств.

Различают два вида случайных величин:

Дискретная (прерывная) случайная величина – это величина, принимающая отдельные числовые значения, их можно просчитать.

(число студентов на лекции, число волос на голове)

Непрерывная случайная величина- это величина, принимающая любое значение в определенном интервале.

(температура воздуха, показания любого стрелочного прибора)

Числовые характеристики дискретной случайной величины

Математическое ожидание—это сумма произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

$\mathbf{M(x)=x_1P_1+x_2P_2+\ldots+x_nP_n}=\sum_{i=1}^{n} x_i P_i$ Если n→∞, то $\bar{x}\approx$M(x)

Дисперсией дискретной случайной величины – называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания. $\mathbf{D(x)=M[x-M(x)]^2}$

Для вычисления более удобна формула: $\mathbf{D(x)=M(x^2)-M^2(x)}$

Среднее квадратическое отклонение-это квадратный корень из дисперсии.

$$\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{D(x)}$$

Пример1:

Дан закон распределения случайной величины *X*

X	0	1	2	5	7
P	0,1	0,33	0,12	0,0 5	0,4

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Дано:

$x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=5$; $x_5=7$

$P_1=0,1$;$P_2=0,33$;$P_3=0,12$;$P_4=0,05$;$P_5=0,4$

Найти:

M(x)=?

D(x)=?

σ (x)=?

Решение:

$M(x)=\sum x_i \cdot P_i =0\cdot 0,1+1\cdot 0,33+2\cdot 0,12+5\cdot 0,05+7\cdot 0,4=3,62$

$D(x)=M(x^2)-M^2(x)=21,66-3,62^2=8,56$

$M(x^2)= 0^2\cdot 0,1+1^2\cdot 0,33+2^2\cdot 0,12+5^2\cdot 0,05+7^2\cdot 0,4=21,66$

$\sigma (x)=\sqrt{D(x)} =\sqrt{8,56} \approx 2,9$

Ответ: M(x)=3,62; D(x)=8,56; σ (x)=2,9

Биномиальное распределение.

Пусть вероятность некоторого события **A** равна **P(A),** тогда вероятность события противоположного **q=1-P(**A).

Пусть испытание проводится **n** раз. Биномиальный закон позволяет рассчитать вероятность того, что среди **n** испытаний событие **A** произойдет **m** раз.

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!}$$

$$P_{m,n} = C_n^m P^m(A)(1-P(A))^{n-m}$$

Задача: Лечение заболевания приводит к выздоровлению в 80%. Лечилось пятеро животных. Каковы вероятности того, что:

1. выздоровят все пятеро,
2. выздоровят четверо,
3. не выздоровит ни один,

Дано:

P(A)=0.8

n=5

$m_{1=}5$

$m_{2=}4$

$m_{3=}0$

$P_{5,5}$=? $P_{5,4}$=? $P_{5,0}$=?

Решение:

Применяют биномиальный закон распределения.

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-m+1)}{m!}$$

$$P_{m,n} = C_n^m P^m(A)(1-P(A))^{n-m}$$

1. Рассчитывают число сочетаний $C_5^5 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1$

Находят вероятность того, что выздоровят все пятеро животных:
$P_{5,5}=1 \cdot 0.8^5 \cdot (1-0.8)^0 = 0.8^5 = 0.327$

2. Рассчитывают число сочетаний $C_5^4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5$

Находят вероятность того, что выздоровят четверо животных:
$P_{5,4}=5 \cdot 0.8^4 \cdot (1-0.8)^1 = 5 \cdot 0.8^4 \cdot 0.2 = 0.409$

3. Рассчитывают число сочетаний $C_5^0=1$

Находят вероятность того, что не выздоровит ни одно животное:
$P_{5,0}=1 \cdot 0.8^0 \cdot (1-0.8)^5 = 0.2^5 = 3.19 \cdot 10^{-4}$

Ответ: $P_{5,5}=0.327$; $P_{5,4}=0.409$; $P_{5,0}= 3.19 \cdot 10^{-4}$

Распределение Пуассона.

Когда вероятность события очень мала (P<0.1) и исчисляется сотыми и тысячными долями единицы, то для описания такого рода распределений редких событий служит формула Пуассона.

$$P_{n,m} = \frac{\lambda^m}{m!} \ell^{-\lambda} = \frac{\lambda^m}{m!\,\ell^{\lambda}},$$

Закон Пуассона позволяет рассчитать вероятность того, что при **n** испытаниях нужное нам событие выпадает **m** раз.

Где: **λ=n p** -ожидаемое среднее значение;

m-частота ожидаемого события в **n** независимых испытаний;

e=2,7183 -основание натуральных логарифмов;

m!-факториал или произведение натуральных чисел **m!=** 1·2·3·4...m.

<u>Задача:</u> Предположим, что редкое заболевание встречается у 0.02% большой популяции. Из популяции производят случайную выборку в 10000 человек, которых проверяют на это заболевание. Каково ожидаемое число людей с заболеванием в этой выборке? Какова вероятность, что заболевание окажется у трёх человек?

Дано:

P=0.0002

n=10000

m=3

λ=? $P_{n,m}$=?

Решение:

Так как вероятность очень мала (P<0.1), применяем закон Пуассона:

$$P_{n(m)} = \frac{\lambda^m}{m!} \ell^{-\lambda} = \frac{\lambda^m}{m!\,\ell^{\lambda}},$$

1. Рассчитаем ожидаемое количество больных в данной выборке: λ=n·P
λ=10000·0.0002=2

2. Найдём вероятность того, что в этой выборке окажется трое больных.

$P_{n,3}=\frac{2^3\cdot\ell^{-2}}{3!}=\frac{8\cdot 2.7^{-2}}{1\cdot 2\cdot 3}=0.36$

Ответ: $\lambda=2$; $P_{n,3}=0.36$

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

Средним значением или *математическим ожиданием* непрерывной случайной величиной X называется значение интеграла:

$$M(X)=M_x=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{f(x)dx},$$

где f(x) –плотность вероятности.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называется значение интеграла: $\mathrm{D(X)}=\mathrm{D_x}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M_x)^2 f(x)dx.$

Для определения дисперсии может быть также использована формула:

$$\mathrm{D_x}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-M_x^2.$$

Задача:

Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = x/2 в интервале (0; 2), вне этого интеграла f(x) = 0.

Найти математическое ожидание величины X.

Решение: На основании формулы: $M_x=\int_{-\infty}^{\infty}x\mathrm{f(x)dx}$

имеем $M_x=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}x\mathrm{dx}=\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{x}^2dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}=\frac{1}{6}(2^3-0^3)=\frac{4}{3}.$

Задача:

Случайная величина X задана плотностью вероятности $\mathrm{f(x)}=\mathrm{C}(\mathrm{x}^2+2x)$ в интервале (0; 1). Вне этого интервала f(x) =0. Найти параметр C.

Решение. Так как $C\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f(x)dx}=1,$

то: $C\int_0^1(\mathrm{x}^2+2x)dx=C\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)=C\frac{4}{3}=1.$ Откуда C = ¾.

Задача:

Случайная величина X задана в интервале $(0;\pi)$ плотностью вероятности f(x) = 0. Найти дисперсию величины X.

Решение:

Для нахождения дисперсии используем формулу: $\mathrm{D_x}=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-M_x^2.$

Математическое ожидание : $M_x = \int_0^{\pi} xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\sin xdx.$

Интегрируя по частям, получаем $\mathrm{M}_x = \pi/2$. Находим значение первого слагаемого в выражении дисперсии:

$$\int_0^{\pi} \mathrm{x}^2 f(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin xdx.$$

Интегрируя по частям дважды, получаем

$$\int_0^{\pi} x^2 f(x)dx = \frac{\pi^2}{2} - 2.$$

Подставляя в выражение дисперсии полученные значения, находим

$$\mathrm{D}_x = \frac{\pi^2}{4} - 2.$$

Функция распределения вероятностей и плотность вероятности.

Непрерывные случайные величины характеризуются тем, что их значения могут сколь угодно мало отличаться друг от друга.

Вероятность события X<*x* (где X- значение непрерывной случайной величины, а *x* – произвольно задаваемое значение), рассматривамая как функция от *x*, называется *функцией распределения вероятностей:*

$$F(x) = P(X<x)$$

Производная от функции распределения вероятностей называется *функцией плотностей* или *плотностью вероятности:*

$$F(x)= F'(x)$$

Функция распределения вероятностей выражается через плотность вероятности в виде интеграла:

$$F(x)= \int_{-\infty}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(x)dx}$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал $(x_1\ x_2)$ равна приращению функции распределения вероятностей на этом интервале:

$$P(x_1 < \mathrm{X} < \mathrm{x}_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Задача:

Случайная величина X задана функцией распределения вероятностей

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \mathrm{x} \le 2 \\ (\mathrm{x}-2)^2 & \text{если } 2 < \mathrm{x} \le 3, \\ 1, & \text{если } \mathrm{x} > 3. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности f(x) и вероятность попадания случайной величины X в интервалы (1;2,5), (2,5;3,5).

Решение:

Плотность вероятности находим по формуле **f(x)=F'(x):**

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{åñëè } \tilde{o} \le 2, \\ 2\tilde{o} - 4, & \text{åñëè } 2 < \tilde{o} \le 3 \\ 0, & \text{åñëè } \tilde{o} > 3 \end{cases}$$

Вероятности попадания случайной величины X в интервалы вычисляем по формуле:

P(1<X<2.5)= F(2.5)- F(1)=0.5$^2 - 0 = 0{,}25$

P(2.5<X<3.5)=F(3.5)-F(2.5)=1-0.25=0.75.

Задача:

Плотность вероятности непрерывной случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1, \\ x - \frac{1}{2}, & \text{если } 1 < x \le 2, \\ 0, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

Найти функцию распределения F(x) и построить ее график.

Решение.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 0, \text{если } x \le 1,$$

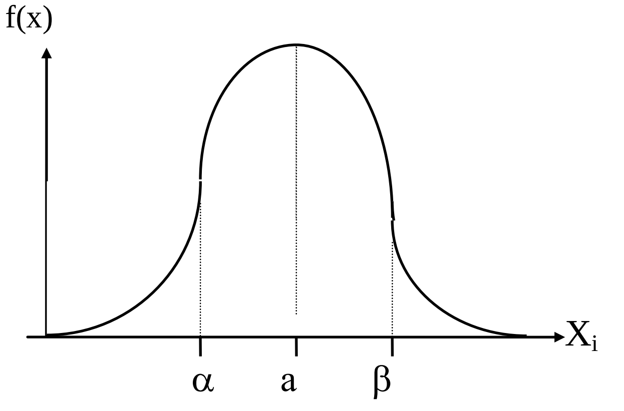
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{x} f(x)dx = 0 + x^2/2 - (\tfrac{1}{2})x = (x^2 - x)/2, \text{если } 1 < x \le 2,$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{x} f(x)dx + \int_{2}^{x} f(x)dx = (x^2 - x)/2 \Big|_{1}^{2} = 1, \text{если } x > 2.$$

Нормальный закон распределения.

Для непрерывной случайной величины функция плотности вероятности рассчитывается по формуле: $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ell^{\frac{-(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}}$

График нормального распределения непрерывной случайной величины имеет вид:



Вероятность того, что случайная величина лежит в интервале от α до β численно равна площади фигуры, заключенной между осью абсцисс и кривой, отвечающей нормальному закону. С помощью методов интегрального исчисления можно вычислить эту площадь. Площадь фигуры равна определенному интегралу от α до β от функции плотности вероятности. Тогда, вероятность того, что случайная величина лежит в интервале от α до β можно определить по формуле:

$$P(\alpha \le x \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ell^{\frac{-(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}} \mathrm{dx}$$

Вычисления упрощаются, если определенный интеграл от α до β от функции плотности вероятности представить как разность двух **F** функций, т. е.

$$P(\alpha \le x \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \ell^{\frac{-(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}} \mathrm{dx} = F(\frac{\beta - \bar{x}}{\sigma}) - F(\frac{\alpha - \bar{x}}{\sigma})$$

Значения **F(t)**-функций определяются по таблице №1 (Значения интеграла вероятностей для разных значений t).

Задача:

Систолическое давление у женщин, страдающих гипертонической болезнью, имеет, согласно оценкам, среднее 158 мм. рт.ст. и стандартное отклонение 15 мм. рт.ст. В предположении, что систолическое давление является нормальной случайной величиной, оцените вероятность того, что давление находится между 141 и 177 мм.рт.ст. Какое количество женщин из 1000 имеет давление в этом интервале ?

Решение:

Дано:

$\bar{X} = 158$ мм.рт.ст

α=141 мм.рт.ст

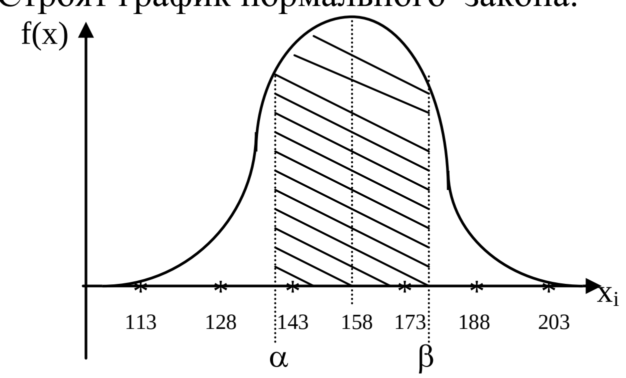
β=177 мм.рт.ст

n=1000

σ=15 мм.рт.ст

P(141≤ **X** ≤177)=?

Строят график нормального закона.



1. Вероятность того, что случайная величина находится в интервале от 141 до 177мм.рт. ст. находят по формуле:

$$P(\alpha \le x \le \beta) = F(\frac{\beta - \bar{X}}{\sigma}) - F(\frac{\alpha - \bar{X}}{\sigma})$$

$P(141 \le x \le 177) = F\left(\frac{177-158}{15}\right) -$

$F\left(\frac{141-158}{15}\right) = F(1.27) + F(1.13) = 0.3980 + 0.3708 = 0.7688$

2. Чтобы найти, какое количество женщин имеет давление в этом интервале, используют формулу $P = \frac{m}{n}$, из которой находят $m = n \cdot P$

$m = 1000 \cdot 0.7688 = 768.8 \approx 769$

Ответ: P=0.7688; m=769

Задачи для самостоятельного решения.

11.1 Случайная величина X задана законом распределения:

X	0	1	2
p	0,25	0,25	0,5

Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратичное отклонение, построить функцию распределения.

11.2 Сделано 5 определений содержания кальция в крови (в условных единицах): 11,27; 11,36; 11,09; 11,16; 11,47.

Вычислите $\overline{X}$; σ^2; σ

11.3 Для эксперимента по определению скорости роста требуется выбрать четыре штамма бактерий из имеющихся восьми. Сколькими способами это можно сделать?

11.4 У 6 мальчиков и11 девочек в классе имеются признаки инфекционного заболевания. Чтобы проверить наличие заболевания требуется взять выборочный анализ крови:

1. у двух мальчиков
2. у двух девочек.

Сколькими способами можно это сделать?

11.5 У шести животных имеется заболевание, причем вероятность выздоровления равна 0.95. Какова вероятность того, что:

а) выздоровят все шестеро животных;
б) не выздоровит ни одно;
в) выздоровят только пятеро?

11.6 Лечение заболевания приводит к выздоровлению в 75% случаев. Лечилось семь больных. Каковы вероятности того, что:

а) выздоровят шесть;
б) не выздоровит ни один;
в) выздоровят четверо.

11.7 В некоторой большой популяции 20% левшей. Если из популяции случайно выбирают 10 человек, то какова вероятность того, что:

1) все они являются левшами
2) пятеро являются левшами
3) нет ни одного левши

11.8 В некоторой большой популяции 70% людей, владеют правой рукой лучше, чем левой. Если из популяции случайно выбирают 8 человек, то какова вероятность того, что:

1) семь владеют правой рукой лучше, чем левой
2) трое владеют правой рукой лучше, чем левой
3) ни один из них не владеет правой рукой лучше, чем левой

11.9 В некоторой большой популяции 10% людей одинаково свободно владеют обеими руками. Если из популяции случайно выбирают 9 человек, то какова вероятность того, что:

1) один одинаково свободно владеет обеими руками?
2) шесть человек одинаково свободно владеет обеими руками?
3) все девять одинаково свободно владеют обеими руками?

11.10 В соответствии с группами крови людей можно расклассифицировать на четыре взаимно исключающие категории: **O, A, B, AB**. В одной большой популяции доли различных групп крови соответственно равны **0.45, 0.4, 0.1, 0.05**. Допустим, что из этой популяции случайным образом выбирают семь человек. Каковы вероятности того, что:

1. трое из них имеют группу **O**.
2. ни один из них не имеет группу крови **AB**?
3. четверо имеют группу **A**
4. пятеро имеют группу **B**

11.11 В популяции дрозофиллы у 20% особей имеется мутация крыльев. Если из популяции выбирают наугад шесть мух, то какова вероятность мутации:

1. у двух из них?
2. у одной?
3. у пяти?

11.12 В некоторой большой популяции у 40% людей волосы чёрные, у 40% рыжие и у 20% светлые. Если из популяции случайно выбирают 10 человек, то каковы вероятности того, что среди них:

1. пятеро черноволосых
2. трое рыжих,
3. семь светловолосых

11.13 Согласно ГОСТу, вероятность содержания лекарственных веществ в одной грануле равна 0.9. Какова вероятность того, что из 10 гранул 5 удовлетворяют нормативам?

11.14 Составьте закон распределения случайной величины X-(число мальчиков) среди пяти новорожденных. Вероятность рождения мальчика 0.515.

11.15 Составьте закон распределения случайной величины X-(число девочек) среди пяти новорожденных. Вероятность рождения девочки 0.485.

11.16 Всхожесть семян лекарственного растения оценивается вероятностью 0.9. Составить биномиальное распределение вероятностей появления всхожих семян из шести наугад взятых.

11.17 На 10000 семей с 4 детьми было: все девочки-в 566 семьях, все мальчики- в 641 семье. Исходя из предположения о биномиальности распределения, вычислите вероятность рождения мальчиков и девочек.

11.18 Среди 10000 сеянцев ячменя в среднем два не имеют обычной зелёной окраски в результате спонтанных мутаций, влияющих на хлорофилл. Какова вероятность того, что из 20000 случайно выбранных сеянцев ячменя ровно у трёх не окажется обычной зелёной окраски?

11.19 Вероятность изготовления нестандартного продукта равна 0.004. Найти вероятность того, что в партии из 1000 единиц окажется 5 нестандартных.

11.20 Если в среднем левши составляют 1%, то какова вероятность, что среди 200 человек 4 левши?

11.21 Вероятность заболевания туберкулёзом лёгких в данной местности равна 0.03. %. Какова вероятность, что при осмотре 10000 человек будет выявлено трое больных?

11.22 Фармацевтический завод отправил на аптечный склад 10000 ампул витамина С. Вероятность того, что в пути ампула будет повреждена, равна 0.0002. Найти вероятность того, что на склад прибудет 5 дефектных ампул.

11.23 Среди семян лекарственного растения 0.04% семян сорняков. Какова вероятность при случайном отборе 10000 семян обнаружится 5 семян сорняков?

11.24 Некоторый вид пищи вызывает аллергическую реакцию у 0.001% индивидумов. Если эту пищу ежедневно едят 100000 человек, то каково ожидаемое число людей, испытывающих аллергическую реакцию. Какова вероятность того, что 9 человек испытывают аллергическую реакцию?

11.25 Считается, что вакцина формирует иммунитет против полиомиелита в 99.99% случаев. Предположим, что вакцинировалось 10000 человек. Каково ожидаемое число людей, не приобретших иммунитет? Какова вероятность того, что иммунитет не приобрели 5 человек?

11.26 Предположим, что редкое заболевание встречается у 0.02% большой популяции. Из популяции производят случайную выборку в 20000 человек, которых проверяют на это заболевание. Каково ожидаемое число людей с заболеванием в этой выборке? Какова вероятность, что заболевание окажется у 5 человек?

11.27 По оценкам 0,5% взрослого населения одной большой популяции имеет значительную избыточную массу. Из этой популяции случайно выбирают 1000 человек. Каково ожидаемое число людей у которых обнаружится избыточная масса? Какова вероятность того, что среди 1000 человек трое окажутся с избыточной массой?

11.28 Предположим, что редкое заболевание встречается у 0.1% большой популяции. Производят случайную выборку в 5000 человек, которых проверяют на это заболевание. Каково ожидаемое число людей с заболеванием в этой выборке? Какова вероятность, что заболевание окажется ровно у четырех человек?

11.29 Примерно один ребенок из 700 рождается с синдромом Дауна. В больнице в год рождается 3500 детей. Каково ожидаемое число новорожденных с синдромом Дауна? Какова вероятность того, что с синдромом Дауна родится 8 детей?

11.30 Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = x/8 в интервале (0; 4). Вне этого интервала f(x) = 0.
Найти математическое ожидание.

11.31 Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = $e^{-2|x|}$ при $-\infty < x < \infty$. Найти математическое ожидании.

11.31 Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = 0,25 sin (x/2) на интервале $(0;2\pi)$. Вне этого интервала f(x) = 0. Найти дисперсию величины X.

11.32 Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = 0,5 cos x на интервале $(-\pi/2;\pi/2)$. Вне этого интервала f(x) = 0. Найти дисперсию величины

11.33 Случайная величина имеет распределение Рэлея:

$$F(x) = 1 - e^{-x^2/(2\sigma^2)} \qquad (x \geq 0).$$

Написать выражение плотности вероятности случайной величины.

11.34 Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = a/$(1 + x^2)$ при $-\infty < x < \infty$. Определить параметр a и математическое ожидание.

11.35 Случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x) = -\dfrac{3x^2}{4} + 6x - \dfrac{45}{4}$ на интервале (3; 5). Вне этого интервала f(x) = 0. Найти математическое ожидание.

11.36 Случайная величина X задана плотностью вероятности f(x) = $-\dfrac{3x^2}{4} + \dfrac{9x}{2} - 6$ в интервале (2; 4). Вне этого интервала f(x) = 0. Найти математическое ожидание.

11.37 Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{2}\sin x, & \text{если } 0, x \leq \pi \\ 0, & \text{если } x > \pi. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить график.

11.38 Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq 1, \\ \dfrac{1}{3}(x - \dfrac{1}{2}), & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ 0, & \text{если } x > 3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения вероятностей и построить график.

11.39 Систолическое давление у женщин, страдающих гипертонической болезнью, имеет, согласно оценкам, среднее 161 мм и стандартное отклонение 10 мм. В предположении, что систолическое давление является нормальной случайной величиной, оцените вероятность того, что давление находится между 155 и 179 мм.рт.ст. Какое количество женщин из 1000 имеет давление в этом интервале ?

11.40 Известно, что для человека pH крови является нормальной случайной величиной со средним 7.4 и стандартным отклонением 0.2. Какова вероятность того, что:

1.уровень pH превосходит 7.45?

2.уровень pH находится между 7.3 и 7.47?

11.41 Диастолическое давление у женщин, страдающих гипертонической болезнью, имеет, согласно оценкам, среднее 98 мм и стандартное отклонение 15 мм. В предположении, что диастолическое давление является нормальной случайной величиной, оцените вероятность того, что давление находится между 83 и 110 мм.рт.ст. Какое количество женщин из 1000 имеет давление в этом интервале?

11.42 Средний рост 1000 солдат 181 см со стандартным отклонением 5см. Предположив, что рост подчиняется нормальному закону, оцените число солдат в группе, рост которых лежит между:

1. 170 и 175см,
2. больше 177см,
3. меньше 174см.

11.43 Установлено, что длина среднего пальца руки мужчины для некоторой группы людей подчиняется нормальному закону со средним 60 мм и стандартным отклонением 3 мм. Предположив, что в группе 800 человек, найдите, у скольких из них средний палец:

1. длиннее 62 мм,
2. короче 57 мм,
3. длиной между 60 и 66 мм.

11.43 Пусть масса пойманной рыбы подчиняется нормальному закону. Среднее значение веса одной рыбы равно 375 г., а стандартное отклонение 25г. Найти вероятность того, что масса одной пойманной рыбы:

1. составит от 345 до 410 г
2. не более 378г
3. больше 360 г.

11.44 Обнаружено, что оценки, полученные на экзамене большой группой студентов, подчиняются приближенно нормальному закону. Среднее значение равно-58, стандартное отклонение-10. Из группы случайным образом выбирается один студент. Найдите вероятность того, что его оценка будет:

1. больше 68
2. меньше 63
3. больше 41, но меньше 63.

11.45 Частота сердечных сокращений (ЧСС) пациента в течение суток изменялась в пределах 75 до 80 ударов в минуту. Найти вероятность попадания ЧСС в этот интервал, считая данную величину распределённой по нормальному закону с математическим ожиданием M(X)=72 сокращения в минуту и средним квадратичным отклонением, равным 5 сокращений в минуту.

11.46 Предполагая, что распределение массы лабораторных животных подчиняется нормальному закону, найти вероятность того, что масса случайно взятого животного будет находиться в пределах от 32 до 35г, если математическое ожидание M(X)=30г, среднее квадратичное отклонение, равно 3г.

11.47 Масса взрослого животного некоторого вида является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 100 кг и стандартным отклонением 8 кг. Наудачу выбирают взрослое животное. Найти вероятности следующих событий:

1) масса животного меньше 90 кг;
2) больше 110 кг;
3) находится в интервале от 95 до 105 кг;
4)находится в интервале от 97 до 112 кг.

11.48 Диастолическое давление крови выпускников некоторого училища является нормально распределенной случайной величиной со средним значением 80мм и стандартным отклонением 5 мм. Измеряю давление крови у случайно выбранного выпускника. Определить вероятность того, что:

1) давление ниже 70 мм;
2) выше 85 мм;
3) выше 90 мм, но при дополнительном условии, что пациент выбран из числа тех, у кого на день проверки диастолическое давление оказалось выше 85 мм.

11.49 Предприятие выпускает стеклянные ампулы, размеры которых будем считать распределенными по нормальному закону. Средняя длина 100 мм, а стандартное отклонение 1 мм. ампула считается бракованной, если она короче чем 98 мм или длиннее 101 мм. Найти среднее число бракованных ампул среди 3 наудачу взятых ампул.

11.50 В условиях задачи 22 найти интервал, симметричный относительно среднего значения бракованных ампул, в которой попадает реально число бракованных ампул с вероятностью не менее 0.96.

11.51 Дана плотность распределения вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin x, & 0 \prec x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & x \succ \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$ Найти F(x).

11.52 Дана плотность распределения вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \succ 2 \\ x=-\dfrac{1}{2}, & 1 \prec x \le 2 \\ 0, & x \le 1 \end{cases}$$ Найти F(x).

11.52 Дана плотность распределения вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le \dfrac{\pi}{6} \\ 3\sin 3x, & \dfrac{\pi}{6} \prec x \le \dfrac{\pi}{3} \\ 0, & x \succ \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$ Найти F(x).

11.53 Дана плотность распределения вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \cos x, & 0 \prec x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & x \succ \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$ Найти F(x).

11.54 Случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & 0 \prec x \le 1 \\ 1, & x \succ 1 \end{cases}$$

11.55 Найти вероятность того, что в результате четырёх независимых испытаний величина X ровно три раза примет значение, принадлежащее интервалу
(0,25; o,75).

11.56 Случайная величина X задана функции плотности вероятности:

$$f(x)=\begin{cases} 0, x \le 0, \\ 2x, 0 < x \le 1 \\ 0, x > 1 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание величины X.

11.57 Случайная величина X задана функции плотности вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ \frac{3}{4}x^2 + 6x - \frac{45}{4}, & 3 < x \le 5 \\ 0, & x > 5 \end{cases}$$

Найти математическое ожидание величины X.

11.58 Случайная величина X задана функции плотности вероятности:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le a \\ \frac{1}{\pi\sqrt{9 - x^2}}, -3 < x \le 3 \\ 0, x > 3 \end{cases}$$ Найти дисперсию X.

11.59 Плотность вероятности случайной величины X, равномерно распределенной на [a, b]:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \text{-}3 \\ \frac{1}{b\text{ - }a}, & a < x < b \\ 0, & b > b \end{cases}$$

Найти:

1) функцию распределения F(x) и начертить ее график;

2) математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение случайной величины X.

IV. Математическая статистика.

12.**Выборка и её представление. Статистическое оценивание**.

Математическая статистика-это раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования данных для научных и практических выводов.
Генеральная совокупность-это совокупность объектов, которые отличаются друг от друга, но схожие определенным признаком.
Выборка-это часть генеральной совокупности.
О свойствах генеральной совокупности можно судить по свойствам выборки, поэтому она должна быть репрезентативной.
Вариационный ряд-это данные расположенные в порядке возрастания.
Для наглядности данные представляют в виде полигона или гистограммы распределения.

Гистограмма-это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основании которых равны ширине класса, а высоты-функции плотности вероятности.

Построение гистограммы.

Предположим, что в результате эксперимента получен ряд значений случайной величины –X_i

X_1 X_2 X_3 ……….. X_n

1. Строят вариационный ряд-все данные располагают в порядке возрастания.
2. Находят размах варьирования- $R=X_{max}-X_{min.}$
3. При большом ряде прибегают к группировке. Число групп или классов находят по формуле: К=2Ln**n**.
4. Находят величину класса: $d=\frac{R}{K}$
5. Разбивают выборку на классы: 1. X_{min}- $X_{min}+d$
   2. $X_{min}+d$- $X_{min}+2d$
   3. $X_{min}+2d$- $X_{min}+3d$ и т.д.
6. Находят число измерений, попавших в каждый класс (частота попадания-h_i).
7. Определяют эмпирическую плотность вероятности случайной величины- $f(x)=\frac{h_i}{nd}$
8. Строят гистограмму: по оси абсцисс откладывают границы классовых интервалов, по оси ординат-значения функции плотности вероятности-f(x).

<u>**Задача:**</u> Измерена концентрация сывороточного альбумина (г/.л) в крови 50 женщин, включённых в одно обследование. По полученным данным построить гистограмму.

42 41 42 44 44 36 38 41 42 44 42 39 49 40 45 32
34 43 37 39 41 39 48 42 43 33 43 35 32 39 35 43
44 47 40 39 42 41 46 37 49 41 39 43 42 47 48 51
52 34

<u>**Решение**</u>**:**

1. Строят вариационный ряд-все данные располагают в порядке возрастания:

32	32	33	34	35	35	35	35	36	37
37	38	39	39	39	39	39	39	40	40
41	41	41	41	41	41	42	42	42	42
42	42	43	43	43	43	43	44	44	44
46	46	47	47	48	48	49	49	51	52

2. Находят размах выборки:$\mathbf{R=X_{max} - X_{min.}}$
   R=52-32=20
3. Выбирают количество классов: **к=4**;
4. Находят ширину одного класса по формуле: **d=R/k;** **d=20/4=5;**
5. Разбивают вариационный ряд на классы и находят частоту попадания в каждый класс:

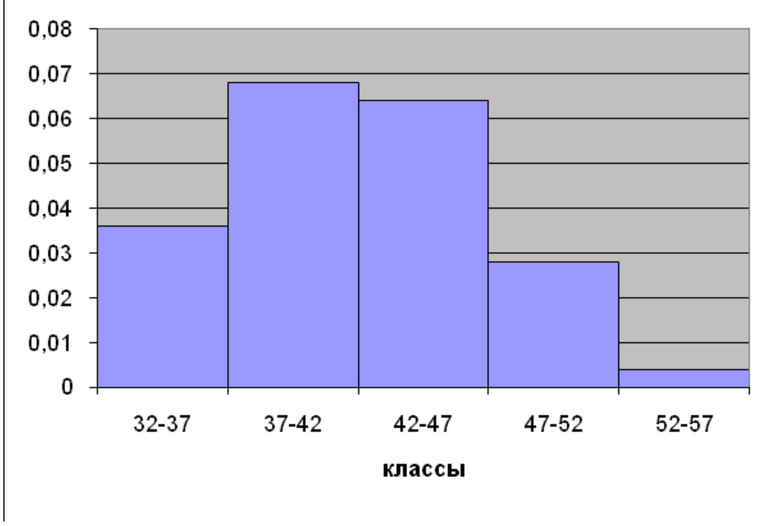
a) 32-37 **h_1=9**
b) 37-42 **h_2=17**
c) 42-47 **h_3=16**
d) 47-52 **h_4=7**
e) 52-57 **h_5=1**

6.Расчитывают функцию плотности вероятности по каждому классу по формуле: $f(x) = \frac{h_i}{nd}$

1. f_1=9/250 =0.036
2. f_2=17/250=0.068
3. f_3=16/250=0.064
4. f_4=7/250 =0.032
5. f_5=1/250 =0.004

7 Строят гистограмму, откладывая по оси X значения случайной величины, а по Y-(F)-значения функции плотности вероятности:

№ класса	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
классы	32-37	37-42	42-47	47-52	52-57
F	0,036	0,068	0,064	0,028	0,004



Расчёт моды и медианы.

Для величин, по которым построена гистограмма, медиану можно определить следующим способом. Необходимо найти класс, в котором содержится медиана. Для этого необходимо складывать частоты встречаемости по классам до тех пор, пока сумма частот не превзойдет половину всех членов ряда. Данный класс называется медианным. Тогда медиану можно найти по формуле:

$$Me = x_н + \lambda(\frac{\frac{n}{2} - \sum f_i}{f_{Me}})$$

где x_n- нижняя граница интервала, содержащего медиану,
$\sum f_i$- сумма накопленных частот, стоящая перед медианным классом,
λ- величина классового интервала,
f_{Me} - частота медианного класса,

n- общее число наблюдений.

Подставим числовые данные в формулу и рассчитаем медиану:

$$Me = 37 + 5(\frac{\frac{25}{2}-9}{17}) = 41.7$$

Мода- это величина, наиболее часто встречающаяся в данной совокупности. Класс с наибольшей частотой называется модальным. Моду можно найти по формуле: $Mo = x_n + \lambda(\frac{f_2 - f_1}{2f_2 - f_1 + f_3})$

Где: x_n- нижняя граница модального класса,

f_2, f_1- частота класса, предшествующего модальному,

f_3- частота класса, следующего за модальным,

λ- ширина классового интервала.

Подставим числовые данные в формулу и рассчитаем моду:

$$\grave{I}\hat{i} = 37 + 5(\frac{17-9}{2\cdot 17 - 9 + 16}) = 38$$

Расчёт коэффициентов ассиметрии и эксцесса.

Коэффициент ассиметрии определяется по формуле:

$$As = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Эксцесс определяется по формуле:

$$\acute{Y} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]^{2}} - 3$$

Интервальная оценка параметров генеральной совокупности.

По известным выборочным характеристикам можно построить интервал, в котором с той или иной вероятностью находится генеральный параметр. Вероятности, признанные достаточными для уверенного суждения о генеральных параметрах на основании известных выборочных показателей, называют доверительными. Обычно в качестве доверительных используют вероятности **P_1=0.95, P_2=0.99, P_3=0.999.**

Это означает, что при оценке генеральных параметров по известным выборочным показателям существует риск ошибиться в первом случае один раз на 20 испытаний, во втором- один раз на 100 испытаний и в третьем- один раз на 1000 испытаний.

Доверительным вероятностям соответствуют следующие величины нормированных отклонений:

вероятности **P_1=0.95** соответствует **t_1=1.96;**

вероятности $\mathbf{P_2=0.99}$ соответствует $\mathbf{t_2=2.58;}$
вероятности $\mathbf{P_3=0.999}$ соответствует $\mathbf{t_3=3.29;}$

$\bar{x} - t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ -формула доверительного интервала

где $\bar{X}$ - среднее значение выборки;

$\mathbf{t_p}$ – нормированное отклонение;

$\mathbf{S_x}$- стандартная ошибка на генеральной совокупности;

$\boldsymbol{\sigma_x}$ - стандартная ошибка на выборке;

n – объём выборки;

μ-среднее значение генеральной совокупности.

Задача:
Распределение кальция в сыворотке крови обезьян, как было установлено выше, характеризуется следующими выборочными показателями: $\bar{X}$ =11.94 мг, σ =1.27 мг, n =100. Построить 95% доверительный интервал для генеральной средней **μ** этого распределения.

Дано:
$\bar{X}$ =11.94 мг
σ=1.27 мг
n =100
P=0.95

μ=?

Решение:
Применяют формулу доверительного интервала.

$$\bar{x} - t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_p \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Подставляют численные данные:

$$11.94-1.96\frac{1.27}{\sqrt{100}} \le \mu \le 11.94+1.96\frac{1.27}{\sqrt{100}}$$

или 11.70≤ **μ** 12.18

Следовательно, с вероятностью P=0.95 можно утверждать, что генеральная средняя данного нормального распределения находится между 11.70 и 12.18 мг.

Ответ: 11.70≤ **μ** 12.18

Задача:
Исследователь хочет установить средний уровень гемоглобина в определенной группе населения. Сколько человек он должен обследовать, если в 99 случаев из 100 Δ=±5г/л, а **σ=**32г/л.?

Решение:

Дано:
$\boldsymbol{\sigma_x}$ =32
n =10
P=0.99

$\Delta=5$__________

μ=?

Решение:

Применяем формулу необходимого объёма выборочной совокупности:

$$n=\frac{t^2\cdot\sigma_x^2}{\Delta^2}$$

Где: $\Delta = X - \mu$ -ошибка эксперимента

$\bar{X}$ - среднее значение выборки;

t_p – нормированное отклонение;

σ_x - стандартная ошибка на выборке;

n – необходимый объём выборки

μ-среднее значение генеральной совокупности.

$$n=(\frac{2.58\cdot 32}{5})^2\approx 273$$

Ответ: n=273

Задачи для самостоятельного решения.

12.1 Замеры систолического давления у больных гипертонической болезнью 3 степени по выборке (мм. рт. ст.):

227	219	215	230	218	223	220	222	218	219
222	221	227	226	226	209	211	215	218	220
216	220	220	221	225	224	212	217	219	220

Построить гистограмму.

12**.2**. Измерена частота пульса (уд в мин) у здоровых людей. Построить гистограмму согласно полученным данным.

70	69	72	73	71	66	73	67	68	73	71	67	69	74	71	70
70	67	71	69	70	70	70	71	69	71	74	74	71	69	72	71

12.3. Значения временного интервала между зубцами R (сек) ЭКГ:

0,74	0,76	0,76	0,76	0,77	0,76	0,76	0,72	0,72	0,69	0,7	0,76	0,77
0,77	0,79	0,78	0,8	0,69	0,71	0,76	0,76	0,78	0,76	0,77	0,72	0,79
0,75	0,82	0,86	0,91	0,9	0,84	0,82	0,83	0,82	0,76	0,74	0,7	0,8
0,78												

Построить гистограмму.

12.4. Рост новорожденных (см). Построить гистограмму.

47	51	49	54	48	53	54	52	50	50	50	52	50	55	50
51	50	46	50	51	49	51	51	53	51	49	51	51	49	49

12.5. Систолическое давление (мм. рт. ст.) у практически здоровых людей:

127	119	115	130	132	123	120	122	118	119	122	121	127	126	126
109	111	115	118	120	116	120	120	121	125	124	112	117	119	120

Построить гистограмму.

12.6 Диастолическое давление (мм. рт. ст) у практически здоровых людей:
67 71 69 74 68 73 74 72 70 70 70 72 70 75 71 70 69 71 71 69
69 71 70 66 70 71 69 71 71 73
Построить гистограмму.

12.7 Вес животных при рождении (в кг):
27 32 32 31 32 28 37 35 26 28 32 39 34 30 37 26 27 40 35
37 28 43 26 35 45 26 35 32 32 35 35 28 32 36 32 36 37 33
28 31
Построить гистограмму.

12.8. Содержание кальция (мг %) в сыворотке крови обезьян. Построить гистограмму.
13,60 12,90 12,30 9,90 12,73 11,72 10,83 10,42 10,91 10,21 13,10 10,91
11,96 11,13 13,52 13,53 11,25 10,10 13,96 10,00 11,94 10,82 11,05 12,57
12,98 10,27 12,67 11,81 12,07 10,65 12,67 10,49 11,18 11,86 9,66 10,05
9,55 12,50 8,99 12,30

12.9. Даны значения роста студентов (см)1 курса. Построить гистограмму.
164 170 164 165 174 180 182 176 169 175 170 169 170 174 156
168 170 174 167 168 171 182 180 173 178 172 180 168 169 158
169 169 170 168 172 169 162 167

12**.10**. Содержание кальция (мг %) в сыворотке крови обезьян:
12,30 14,20 12,60 11,70 12,20 12,30 11,60 12,00 12,50 13,50 11,60 11,90
11,40 12,00 14,70 11,25 14,20 13,20 12,50 13,80 13,60 12,90 12,30 9,90
12,73 11,72 10,83 10,42 10,91 10,21 13,10 10,91 11,96 11,13 13,52 13,53
11,25 10,10 13,96 10,00
Постройте гистограмму.

12.11 При исследовании процесса газообмена лягушек в естественных условиях был получен следующий вариационный ряд:
3,2 4,2 5,3 5,6 5,6 5,9 6,4 6,5 6,8 7,1 7,1 7,3 7,3 7,3 7,3
7,3 7,4 7,4 7,4 7,4 7,7 9,8 7,3 7,6 9,8 9,8 9,8 10,2 10,6 11,3
12,3 14,2 7,7 7,7 7,7 7,8 7,9 7,9 8,0 8,3 8,3 8,3 8,3 16,3
8,8 8,9 9,2 9,4 8,7 8,8 8,5
Построить гистограмму.

12.12 У 60 человек исследовалось количество воды, выпиваемой в течении суток при физической работе в условиях жаркого климата. Получены следующие числовые данные (в литрах). Построить гистограмму.

4.2	4.3	3.4	2.6	4.4	4.8	3.7	4.0	3.2	3.0	5.4	4.4	3.5	4.1
4.2	5.0	4.7	3.9	3.7	4.5	3.9	3.6	4.6	3.6	4.3	4.5	3.2	3.6
4.5	4.3	3.7	5.0	5.1	4.5	4.1	4.1	4.7	3.5	4.4	4.1	4.2	4.2
4.5	4.5	4.1	3.8	4.9	4.0	3.5	3.8	3.7	4.0	3.2	3.9	3.7	3.7
4.0	3.6	4.4	4.3										

12.13Наблюдения за сахаром крови у 50 человек дали такие результаты:

3.94	3.84	3.86	4.06	3.67	3.97	3.76	3.61	3.96	4.04	3.91	3.62	4.18
3.82	3.94	3.98	3.57	3.87	4.07	3.99	3.69	3.76	3.71	4.26	4.03	4.14
3.81	3.71	4.16	3.76	4.00	3.46	4.08	3.88	4.01	3.93	3.72	4.33	3.82
3.92	3.89	4.02	4.17	3.72	4.09	3.78	4.02	3.73	3.52	4.03		

Построить гистограмму.

12.14 При изучении роста лабораторных крыс коэффициент вариации веса крыс был примерно 13% , а $\overline{X}$ =200г. Чему равны среднеквадратическое отклонение и дисперсия веса крыс?

12.15 У группы лиц исследовались функции:
А) потоотделения,
Б) величина кровяного давления,
В)частота пульса при мышечной работе.
Получены следующие характеристики этих процессов.

А: $\overline{X}_1$=200мл σ_1=22 мл.
Б: $\overline{X}_2$ =160 мм. рт. ст. σ_2 =8 мм рт ст.
В: $\overline{X}_3$=120 уд в мин. σ_3 =16 уд в мин.

1) Сравнить данные процессы по степени их изменчивости.
2) Какой процесс является более изменчивым при мышечной работе человека?

12.16При исследовании газообмена лягушек в естественных условиях были получены следующие числовые значения для количества кислорода, потребленного за один час (в см^2 на 100 г веса): 6,7,7,7,8,8,8,9,9,10,11
Определить среднее количество потребленного кислорода в течение часа, найти дисперсию и среднеквадратическое отклонение.

12.17 При изучении длины листьев садовой земляники сделана выборка. Среднее квадратическое отклонение равно 1.32 см. С вероятностью 0.95 определить такое минимальное число измерений, чтобы отклонение выборочной средней от математического ожидания не превышало 0.06 см.

12.18 Измерено 9 листьев земляники. Получены значения Хср=5см, стандартное отклонение 1.5 см. Каковы доверительные интервалы для μ при уровнях значимости 0.05; 0.01?

12.19 Для определения средней урожайности овса взято 20 проб (на 1 $м^2$) и для них определено Хср=0.125кг. Среднее квадратическое отклонение равно 0.052. Определите, в каких границах заключена средняя урожайность с 1 $м^2$ по всему полю, если вывод следует сделать с надежностью 0.9.

12.20 С помощью случайной выборки, состоящей из 16 витаминных драже, исследовалось содержание витамина Е. Среднее значение оказалось равным 18,1 весовой единицы, а стандартное отклонение 1,2. Найдите границы 95 процентного интервала содержания витамина Е во всей совокупности витаминных драже.

12.21 С помощью случайной выборки состоящей из 625 человек, исследовался диаметр мышцы бедра, среднее значение которого оказался равным 17,1 см, а стандартное отклонение 1,4 см. Найдите границы 95 и 99 процентного доверительного интервала.

12.22 В результате десяти измерений диаметра капилляра (мкм)в стенке лёгочных альвеол были получены следующие данные: 2,83; 2,82; 2,81; 2,85; 2,87; 2,86; 2,83; 2,85; 2,83;2,84. Вычислить точечную и интервальную оценки для диаметра капилляра с доверительной вероятностью Р=0,95

12.23 При определении микроаналитическим способом содержания азота в данной пробе были получены следующие результаты: 9,29; 9,38; 9,35; 9,43; 9,53; 9,48; 9,61; 9,68 (%). Оценить среднее содержание азота в пробе, среднеквадратическое отклонение при доверительной вероятности Р = 0,95. Найдите доверительный интервал.

12.24 При фотоэлектроколориметрическом определении концентрации ацетилсалициловой кислоты на основании реакции с сульфатом меди и пиридином были получены следующие результаты: 99,2%; 99,0%; 98,9%; 99,3%; 98,8%; 99,1 %. Вычислить среднее значение концентрации ацетилсалициловой кислоты, среднеквадратическое отклонение при доверительной вероятности Р = 0,95. Найдите доверительный интервал.

12.25 При анализе лекарственного препарата (с целью контроля его качества) метазона – 1%-ного раствора для инъекций – найдены следующие значения рН этого раствора: 4,50; 4,52; 4,55; 4,60; 4,70; 4,75. Вычислить среднюю величину рН раствора, среднеквадратическое отклонение при доверительной вероятности Р = 0,99. Найдите доверительный интервал.

12.26 В десяти одинаковых пробах были получены следующие значения содержания марганца: 0,69; 0,70; 0,67; 0,66; 0,67; 0,68; 0,67; 0,69; 0,68; 0,68 (%). Вычислить среднюю величину содержания марганца, среднеквадратическое отклонение при доверительной вероятности Р = 0,95. Найдите доверительный интервал.

12.27 При определении посторонних примесей в образце лекарственного препарата найдено суммарное содержание примесей : 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,6 (%) Вычислить среднюю величину содержания примесей, среднеквадратическое отклонение при доверительной вероятности Р = 0,99. Рассчитайте доверительный интервал.

12.28 Высота стебля кукурузы Х-случайная величина, имеющая нормальное распределение. Сколько необходимо отобрать растений, чтобы Хср отличалось от μ меньше, чем на 2 см, если известно, что по результатам проведенных предыдущих измерений стандартное отклонение -6см. Результат найти с надежностью 0.95.

12.29 Сколько следует изучить историй болезни больных дизентерией, чтобы определить средние сроки их лечения, имея в виду, что при одинаковых условиях в 95 случаях из 100 $\Delta=\pm0{,}5$ дня, а $\boldsymbol{\sigma}=\pm1{,}5$ дня.

12.30 Наблюдения за дневным удоем восьми коров, случайно отобранных из стада, дали следующие результаты:

удой	12	13	15	16	18
число голов	1	1	3	2	1

a) Определить вероятность того, что средний удой по всему стаду будет отличаться от среднего удоя восьми голов не более, чем на 2.5кг.

b) С Р=0.95 найти доверительный интервал для среднего удоя по стаду.

12.31 Исследователь хочет установить средний уровень гемоглобина в определенной группе населения. Сколько человек он должен обследовать, если в 95 случаев из 100 $\Delta=\pm2$г/л, а $\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{24}$г/л.?

12.32 Определить минимальное число семей, которое нужно обследовать с целью установления среднего размера семьи с точностью среднего результата, не превышающего 0,2 ($\Delta\leq0{,}2$) при доверительной вероятности Р=0,99. При проведении пробного исследования 10 семей установлено, что среднеквадратическое отклонение составляет 1,3.

12.33 Определить необходимое для исследования число женщин 20-летнего возраста для получения среднего роста с точностью до 0,5см ($\Delta\leq0{,}5$см) при доверительной вероятности Р=0,95. При пробном исследовании 10 женщин получено значение среднеквадратического отклонения 5,5.

12.34 Рассчитать минимальное число наблюдений при исследовании окружности грудной клетки у женщин, если $\overline{X}$=88см, **σ=**3,2см при заданной точности исследования (Δ≤0,9) и доверительной вероятности Р=0,95.

13. Корреляционный и регрессионный анализ.

Существуют две категории связей между признаками:

1) **Функциональные** - каждому значению одной переменной величины соответствует одно вполне определенное значение другой переменной (высота столба ртути соответствует определённой температуре);
2) **Корреляционные** - (статистические) - численному значению одной переменной соответствует много значений другой переменной (одному росту соответствует множество значений веса).

Если есть результаты наблюдения, то первый шаг в анализе процесса состоит в построении различного рода графиков, с помощью которых можно было бы исследовать его основные характеристики. Наиболее простую иллюстрацию парных наблюдений даёт график (диаграмма) рассеяния.

Графики дают первую наглядную информацию о наличии связи между переменными величинами. Поэтому возникает потребность в количественном измерении корреляции. Одним из способов является вычисление коэффициента корреляции.

Коэффициент корреляции-это число, показывающее степень зависимости одной переменной величины от другой.

Свойства коэффициента корреляции:

1. r - число; лежащее в интервале от **–1** до **+1** **(-1≤ r ≤ 1).**
2. если **r=±1,** то точки лежат на одной прямой, следовательно, зависимость между х и у – функциональная
3. если **(0< r <0.5)-** то зависимость между переменными слабая.
4. если **(0.5≤r< 0.7)-** то зависимость между переменными средняя
5. если **r≥ 0.7** существует **сильная** линейная зависимость между переменными.

Рассчитывают коэффициент корреляции по формуле:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

Коэффициент корреляции указывает лишь на степень связи в вариации двух переменных величин, т.е. дает меру тесноты этой связи, но не дает возможность судить о том, как количественно меняется одна величина по мере изменения другой. На этот вопрос позволяет ответить другой метод определения связи между вариационными признаками - метод регрессии.

Зависимость между биологическими признаками может быть самой разнообразной. В большем числе случаев эмпирические регрессии выражаются простыми уравнениями линейной регрессии:

$y = ax + b$

Формулы для вычисления коэффициентов **a** и **b:**

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Задача:

В анализах крови определяли: Х-содержание гемоглобина(%), У-оседание эритроцитов крови за 2 часа(мм). Построить график рассеяния. Найти уравнение регрессии. Найти коэффициент корреляции.

X	**77**	80	82	79	84	75	82	79	87	87	87	90	97	96	92
Y	32	33	33	34	34	34	34	35	36	37	37	38	40	40	40

	x_i	y_i	x_i-x_{cp}	y_i -y_{cp}	(x_i-x_{cp})* (y_i -y_{cp})	$(x_i-x_{cp})^2$	$(y_i-y_{cp})^2$	x_i^2	$x_i * y_i$
	77	32	-7,9	-3,8	62,9	14,44	30,14	5929	2464
	80	33	-4,9	-2,8	24,3	7,84	13,81	6400	2640
	82	33	-2,9	-2,8	8,6	7,84	8,21	6724	2706
	79	34	-5,9	-1,8	35,2	3,24	10,68	6241	2686
	84	34	-0,9	-1,8	0,9	3,24	1,68	7056	2856
	75	34	-9,9	-1,8	98,7	3,24	17,88	5625	2550
	82	34	-2,9	-1,8	8,6	3,24	5,28	6724	2788
	79	35	-5,9	-0,8	35,2	0,64	4,74	6241	2765
	87	36	2,1	0,2	4,3	0,04	0,41	7569	3132
	87	37	2,1	1,2	4,3	1,44	2,48	7569	3219
	87	37	2,1	1,2	4,3	1,44	2,48	7569	3219
	90	38	5,1	2,2	25,7	4,84	11,14	8100	3420
	97	40	12,1	4,2	145,6	17,64	50,68	9409	3880
	96	40	11,1	4,2	122,5	17,64	46,48	9216	3840
	92	40	7,1	4,2	49,9	17,64	29,68	8464	3680
$\sum$=	**1274**	**537**			**630,9**	**104,4**	**235,8**	**108836**	**45845**
$\bar{X}$	**84,9**	**36**							

Ход решения задачи:

1. Находят средние значения первой и второй переменной($\bar{X}_i$ $\bar{Y}_i$ **).**
2. Находят разность между каждым значением случайной величины и средним значением для переменной X иY **(X_i-X_{cp}) и (Y_i-Y_{cp}).**
3. Находят произведение полученных разностей **(X_i-X_{cp}) * (Y_i-Y_{cp})** для каждого значения случайной величины X иY.
4. Возводят в квадрат полученные разности **$(X_i-X_{cp})^2$ и $(Y_i-Y_{cp})^2$**

5. Суммируют значения полученных квадратов разностей и получают суммы: $\sum(X_i\text{-}X_{ср})^2$, $\sum(Y_i\text{-}Y_{ср})^2$ **и** $\sum(X_i\text{-}X_{ср}) * (Y_i\text{-}Y_{ср})$
6. Подставляют полученные суммы в формулу коэффициента корреляции и рассчитывают его значение.

$$r = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}} = \frac{235}{\sqrt{631 \cdot 104}} = 0.92$$

7. Делают вывод: R=0,92 – зависимость сильная, прямопропорциональная.
8. Для построения линии регрессии рассчитывают коэффициенты a и b. Для этого находят суммы: **$\sum Xi^2$ и $\sum Xi*Yi$.**

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \qquad b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$a = \frac{15 \cdot 45845 - 1274 \cdot 537}{15 \cdot 108836 - 1274^2} = 0.37 \qquad b = \frac{537 \cdot 108836 - 1274 \cdot 45845}{15 \cdot 108836 - 1274^2} = 4.06$$

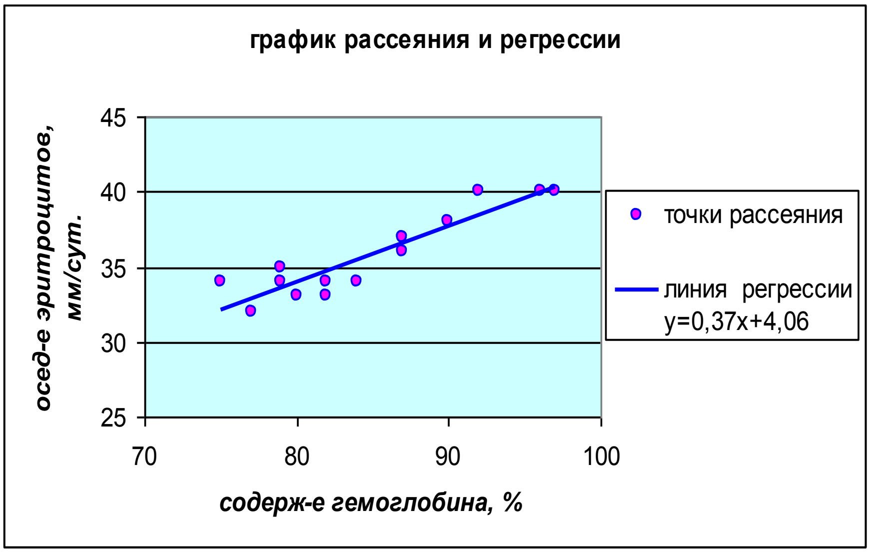
9. Строят уравнение регрессии: **y=ax+b**

<u>Y=0,37x+4,06</u>

X_1=77 Y_1=32.55

X_2=90 Y_2=37.36

10. Строят график:



Ранговая корреляция.

Из непараметрических показателей связи наиболее широкое применение нашел коэффициент корреляции рангов.

Для вычисления обычного коэффициента корреляции необходимо, чтобы исходные данные были выражены достаточно точно. Однако это далеко не всегда возможно. Существуют такие количественные признаки, которые с трудом поддаются точной оценке. Кроме того, распределение одного или обоих коррелирующих признаков может быть очень неравномерным или неправильным. Эти трудности можно обойти, если применить оценку вариант по каждому признаку порядковыми номерами от меньших значений к большим (или наоборот). Порядковый номер по каждому признаку является его рангом. Отсюда название этого метода - определение коэффициента ранговой корреляции. Формула для его вычисления: $r = 1 - \frac{6\sum(x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)}$

X_i и Y_I -ранги по первому и второму признаку;

n- число пар коррелирующих величин.

Задача:

Имеются данные о суточной потребности в белках у восьмилетних девочек. Определить коэффициент корреляции рангов между весом девочек (X) и суточной потребностью у них в белках (Y).

X(кг)	**20**	**22**	**23**	**25**	**26**	**27**	**28**
Y(г)	62	66	62	75	75	78	82

Решение: Используют формулу коэффициента ранговой корреляции **:**

$$r = 1 - \frac{6\sum(x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)}$$

Для решения задачи составляют таблицу:

Ранг X_i	**Вес** (в порядке возрастания)	**Вес**	**потр в белках**	**потр в белках** (в порядке возрастания)	**Ранг Y_i**	**X_i-Y_i**	**$(X_i$-$Y_i)^2$**
1	20	***20***	***62***	62	1,5	-0,5	0,25
2	22	***22***	***66***	62	1,5	-1	1
3	23	***23***	***62***	66	3	1,5	2,25
4	25	***25***	***75***	75	4,5	-0,5	0,25
5	26	***26***	***75***	75	4,5	0,5	0,25
6	27	***27***	***78***	78	6	0	0
7	28	***28***	***82***	82	7	0	0
							$\sum$ =4

Ход решения задачи:

1. Выстраивают данные задачи в порядке возрастания.
2. Ранжируют полученные ряды (нумеруют)*.
3. Находят разность рангов для каждой пары чисел.
4. Возводят в квадрат полученную разность рангов.
5. Находят сумму квадратов разности рангов.
6. Находят коэффициент корреляции рангов по формуле:

$$r = 1 - \frac{6\sum(x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)}$$

R=1-6·4/ 7(7^2–1)=1-0,07=0,93

Вывод: **R= 0,93** – связь между весом девочек и суточной потребностью белка сильная, прямопропорциональная.

Примечание:

* Правила ранжирования

1. Меньшему значению начисляется меньший ранг.
   Наименьшему значению начисляется ранг 1.
   Наибольшему значению начисляется ранг, соответствующий количеству ранжируемых значений. Например, если n=7, то наибольшее значение получит ранг 7, за возможным исключением для тех случаев, которые предусмотрены правилом 2.
2. В случае, если несколько значений равны, им начисляется ранг, представляющий собой среднее значение из тех рангов, которые они получили бы, если бы не были равны.
3. Общая сумма рангов должна совпадать с расчётной, определяемой по формуле:

$\sum(R_i) = \frac{N*(N+1)}{2}$ где N-общее количество наблюдений.

Задачи для самостоятельного решения.

13.1.Имеются следующие результаты тестирования (в баллах) 10-ти студентов. Первый тест проверяет память (х), второй способность к логическому мышлению(у).Построить график рассеяния. Найти коэффициент корреляции между X и Y. Найти уравнение регрессии.

X	5	8	7	10	4	7	9	6	8	6
Y	7	9	6	9	6	7	10	7	6	8

13.2 В анализах крови определяли: Х-содержание гемоглобина(%), У-оседание крови за 24 часа(мм). Построить график рассеяния. Найти уравнение регрессии. Найти коэффициент корреляции.

X	77	80	82	79	84	75	82	79	87	87	87	90	97	96	92
Y	32	33	33	34	34	34	34	35	36	37	37	38	40	40	40

13.**3** В анализах крови определяли: Х-число эритроцитов (в миллионах), У-содержание гемоглобина (в %). Построить график рассеяния. Найти уравнение регрессии. Найти коэффициент корреляции.

X	3,46	3,32	3,11	3,28	3,66	3,90	4,33	3,8	3,82	3,81	4,20	4,47	3,71
Y	77	80	82	79	84	75	82	79	87	87	87	90	97

13.4 Определить коэффициент корреляции между весом обезьян и содержанием гемоглобина в крови. Построить график рассеяния. Найти уравнение регрессии.

X(кг) вес	18	17	19	18	19	22	21	20	30
Y(%) Hb	70	74	72	80	77	80	89	76	86

13.5 Определить коэффициент корреляции между весом обезьян и содержанием кальция (мг%) в сыворотке крови. Построить график рассеяния. Найти уравнение регрессии.

X(кг)вес	18	17	19	18	19	22	21	20	30	18	23	25
Y(мг%) Ca	13,6	14,7	13,1	11,6	11,9	12,2	12,7	11,5	14,5	11,6	12,9	13,5

13.6 При облучении фермента гамма лучами наблюдается падение его активности. Найти коэффициент корреляции между дозой облучения и активностью фермента. Построить график рассеяния. Найти уравнение регрессии.

X(доза)	0	3	7,5	15	30	45	60
Y(активность)	100	83	77	39,9	21,8	10,7	4,43

13.7 Определить коэффициент корреляции между температурой внешней среды X и количеством потребляемого крысами кислорода Y в (мл/г) веса крыс. Построить график рассеяния и найти уравнение регрессии

X	0	5	10	15	20	25	30
Y	3,8	3,4	2,6	2,0	1,7	1,4	1,3

13.8 На белых крысах была показана следующая зависимость между температурой внешней среды-X (в град.) и количеством поглощенного кислорода-Y (в мл/г веса). Определить коэффициент корреляции. Построить график рассеяния и найти уравнение регрессии

X	0	5	10	15	20	25	28	29	30	31	32	33	34
Y	3,83	3,35	2,6	2,02	1,69	1,42	1,39	1,38	1,29	1,39	1,39	1,45	1,65

13.9 Найти коэффициент корреляции между весом (Xi) и содержанием холестерина (Yi) в крови у больных, перенесших инфаркт миокарда. Построить график рассеяния и найти равнение регрессии.

X	**147**	**194**	**166**	**149**	**186**	**231**
Y	209	258	296	254	311	325

13.10 Найти коэффициент корреляции между весом (X) и содержанием холестерина (Y) в крови у больных страдающих стенокардией. Построить график рассеяния и найти уравнение регрессии.

X	**172**	**139**	**174**	**164**	**173**	**135**
Y	230	255	178	299	185	134

13.11 Для установления связи между содержанием фосфора в почве -X и содержанием фосфора в злаковых растениях-Y было проведено 9 анализов со следующими результатами:

X	1	4	5	9	13	11	23	23	28
Y	64	71	54	81	93	76	77	95	109

Найти коэффициент корреляции. Построить график рассеяния. Построить линию регрессии.

13.12 Имеются данные о влиянии толщины угольного пласта (X) на заболеваемость шахтеров гипертонической болезнью (Y). Найти коэффициент корреляции. Построить график рассеяния. Построить линию регрессии.

X(м)	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,5	1,6
Y	3,5	4,2	5,6	6,3	7,4	8,9	10,0

13.13 Найти ранговый коэффициент корреляции между средним суточным содержанием йода (мг) в воде и пище и увеличением щитовидной железы населения (на 10000человек).

Кол-во йода в воде	201	178	155	154	126	81	71
Кол-во заболеваний	0,2	0,6	1,1	0,8	2,5	3	2,4

13.14 Определить коэффициент корреляции рангов между величиной pH (x) и количеством выделившегося желудочного сока (мл/час) у эзофаготомированной собаки (y).

X	3	4	5	3	4	5	3	1	4	6
Y	40	52	57	42	39	51	56	37	43	63

13.15 Вычислить коэффициент корреляции рангов между абсолютным количеством лейкоцитов (X) и моноцитов (Y) в крови здоровых людей.

X	6,8	9,1	9,6	10,1	10,5	13,0	17,1	19,1	22,7
Y	0,52	1,09	0,67	2,83	1,37	1,95	4,1	3,82	1,59

13.16 Вычислить коэффициент корреляции рангов между среднесуточной температурой воздуха и помесячными показателями заболеваемости инфарктом миокарда.

T	-7.6	-7.7	-7.1	-5.8	-4.1	-1.0	6	9	13.0	14.9	15.6	18.8
X	1.23	1.4	1.6	1.14	1.13	1.33	1.22	1.06	1.12	1.02	0.82	0.91

13.17 Вычислить коэффициент корреляции рангов между количеством эритроцитов (X) и гликолитическим индексом (Y).

X	2,9	2,27	1,98	1,81	1,8	1,38	1,27	1,2	0,83
Y	7,2	6,6	13,4	7,4	5,8	6,4	2,8	5,0	2,8

13.18 Вычислить коэффициент корреляции рангов между заболеваемостью населения дизентерией(X) и средней численностью мух (Y) .

X	88	77	60,4	67	117	60	67	68,2	59,8	31,8
Y	17	30	22	7	15	5	2	1,3	1,3	0,7

13.19 Вычислить коэффициент корреляции рангов между заболеваемостью населения дизентерией(X) и средней температурой летнего сезона (Z).

X	88	77	60,4	67	117	60	67	68,2	59,8	31,8
Z	14,3	15	14,6	13,2	15,4	15,0	14,1	15,2	15,7	14,6

13.20 Определить путем исчисления коэффициента корреляции рангов размер и характер связи между насыщением крови кислородом (X) и объемом одного эритроцита (Y) у больных силикозом.

X	94,3	94,0	93,8	93,0	92,5	92,0	92,0	92,0	91,3	91,0	90,8
Y	78	90	108	114	130	118	130	140	140	138	144

13.21 Определить коэффициент корреляции между количеством кальция в воде (X) и ее жесткостью (Y), дать ему оценку. Построить график рассеяния и найти уравнение регрессии.

X (мг/л)	28	56	77	191	241	262
Y(градусы)	4	8	11	27	34	37

13.22 Имеется зависимость между поражённостью населения кариесом зубов X(%) и содержанием фтора в питьевой воде Y (мг). Вычислить коэффициент корреляции рангов.

X	**94,7**	**88,3**	**93,1**	**95,1**	**93,3**	**97,6**	**92,8**	**94**	**97,5**	**94,5**	**90,4**	**94,2**
Y	0,15	0,6	0,15	0,25	0,15	0,35	0,3	0,2	0,2	0,1	0,25	0,1

13.23 Изучалась зависимость между массой тела и содержанием гемоглобина в крови павианов- гамадрилов. Вычислить коэффициент корреляции рангов.

Масса (кг)	17	18	18	19	19	20	21	22	23	25
Содерж. Hb (%)	70	74	78	72	77	76	88	80	77	86

13.24 Получены следующие данные о весе (г) левой камеры сердца и длине ядер (мк) в мышцах сердца:

Вес	**207**	**221**	**256**	**262**	**273**	**289**	**291**	**292**	**304**	**328**	**372**	**397**	**460**
Длина ядер	16,6	18,0	15,9	20,7	19,4	19,8	11,7	21,0	23,0	13,6	19,6	22,9	19,4

Ввиду резко асимметричного распределения вариант по ряду применить для установления связи коэффициент ранговой корреляции.

13.25 Используя данные о систолическом давлении у женщин различных возрастов, определить коэффициент ранговой корреляции.

Возраст	**71**	**33**	**31**	**55**	**63**	**49**	**58**	**38**	**36**	**64**	**45**	**42**	**68**
Давление (мм рт ст)	173	118	125	155	153	161	148	142	110	142	128	136	160

13.26 Определить коэффициент корреляции (ранговый) между количеством заболеваний безжелтушным лептоспирозом (водной лихорадкой) и количеством осадков в определенной местности.

Кол-во заболеван.	**0**	**19**	**4**	**1**	**2**	**68**	**131**	**14**	**11**	**2**
Кол-во осадков	54	101	185	85	30	128	143	74	28	132

14. Критерии достоверности оценок.

Статистическая проверка гипотез.

Для сравнительной оценки генеральных параметров выборок используют нулевую гипотезу H_0.(μ_1-μ_2=0; $\overline{x_1} - \overline{x_2}$ =0)

Для проверки принятой гипотезы, используют функции распределения, которые называются критериями достоверности (статистические критерии).

Статистические критерии:

- параметрические (t – критерий Стьюдента, F – критерий Фишера);
- непараметрические (X – критерий Ван-дер-Вардена, Манна-Уитни, Хи^2-критерий).

Критерий Стьюдента.

Критерий Стьюдента применяется для сравнения двух независимых выборок, взятых из нормально распределяющихся совокупностей.

Пусть $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ - средние значения выборок, взятых из генеральных совокупностей со средними $\mathbf{\mu_1}$ **и** $\mathbf{\mu_2}$. Нулевая гипотеза сводится к предположению, что $\mathbf{\mu_1 = \mu_2}$.

Критерием для проверки $\mathbf{H_0}$-гипотезы служит отношение:

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \quad \text{где} \quad S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sum (Xi - \overline{X}_1)^2 + \sum (X_i - \overline{X}_2)^2}{n(n-1)}}$$

$$t_{ф} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sum (Xi - \overline{X}_1)^2 + \sum (X_i - \overline{X}_2)^2}{n(n-1)}}}$$

$\mathbf{H_0}$-гипотезу отвергают, если фактически установленная величина $\mathbf{t_ф}$-критерия превзойдёт или окажется равной стандартному $\mathbf{t_{st}}$- этой величины для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $\mathbf{k=n_1+n_2-2}$,

т. е. при условии: $\mathbf{t_ф \geq t_{st}}$, Если $\mathbf{t_ф < t_{st}}$, то $\mathbf{H_0}$-гипотеза сохраняется.

В случае не равночисленных выборок, т. е. при $\mathbf{n_1 \neq n_2}$

$$t_ф = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sum(Xi - \overline{X}_1)^2 + \sum(X_i - \overline{X}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}(\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2})}}$$

<u>Задача:</u>

На двух группах крыс поставлен опыт по сравнению влияния разных рационов на рост. Крысы первой группы получали рацион с высоким содержанием белка, крысы второй – с низким. Привесы за 56 дней опыта для каждой крысы составляли в (г):

Высокобелк рацион	**134**	**146**	**104**	**119**	**124**	**161**	**107**
Низкобелк рацион	70	118	101	85	107	132	94

Применяя **t**-критерий Стьюдента определить достоверность влияния высокобелкового рациона на рост крыс.

Для решения задачи составляют таблицу:

№	X_{1i}	X_{2i}	$X_{1i} - \overline{X}_1$	$X_{2i} - \overline{X}_2$	$(X_{1i} - \overline{X}_1)^2$	$((X_{2i} - \overline{X}_2)^2$
1	134	70	6	-31	38	961
2	146	118	18	17	329	289
3	104	101	-24	0	569	0
4	119	85	-9	-16	78	256
5	124	107	-4	6	15	36
6	161	132	33	31	1098	961
7	107	94	-21	-7	435	49
$\sum$=	**895**	**707**			**2563**	**2552**
$\overline{X}$ =	**128**	**101**				
n=	7					

Схема вычисления критерия Стьюдента:

1. Находят средние значения в первой и второй выборке($\overline{X}_1$ $\overline{X}_2$ **).**
2. Находят разность между каждым значением случайной величины и средним значением в первой и второй выборке.
3. Возводят в квадрат полученные разности.
4. Суммируют значения полученных разностей в первой и второй выборке.
5. Подставляют полученные суммы в формулу критерия Стьюдента и рассчитывают фактическое значение критерия Стьюдента по формуле:

$$t_{\hat{o}} = \frac{\left|\overline{x}_1 - \overline{x}_2\right|}{\sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{x}_1\right)^2 + \sum\left(x_i - \overline{x}_2\right)^2}{n(n-1)}}} = \frac{\left|127{,}86 - 101\right|}{\sqrt{\frac{2562{,}86 + 2552}{42}}} = 2{,}43$$

ние критерия Стьюдента для P= 0,95 и R=n_1+n_2 –2 числа степеней свободы: R=7+7-2=12, t_{st}=2,18

7. Делают вывод:

$t_ф \geq t_{st}$, Но – отвергается, высокобелковый рацион на рост крыс влияет.

F-критерий Фишера. Проверка гипотез для дисперсий.

Для проверки $\mathbf{H_0}$ –гипотезы о равенстве генеральных дисперсий ($\mathbf{S_1= S_2}$) нормально распределяющихся совокупностей **t**-критерий оказывается недостаточно точным, особенно при оценке разности дисперсий малочисленных выборок. Д. Снедокер предложил использовать отношение выборочных дисперсий, обозначив этот показатель в честь Фишера буквой **F** т.е. $F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ при $\boldsymbol{\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2}$.

Так как принято брать отношение большей дисперсии к меньшей, то критерий $\mathbf{F \geq 1}$.

Если $\boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$,то **F=1**. Чем значительнее неравенство между выборочными дисперсиями, тем больше будет и величина **F**, и, наоборот, чем меньше окажется разница между дисперсиями, тем меньше будет величина **F**.

Функция **F**- распределения табулирована для **5%**-ного и **1%**-ного уровней значимости и чисел степеней свободы $\mathbf{k_1=n_1-1}$ для большей дисперсии и $\mathbf{k_2=n_2-1}$ для меньшей. Критические точки для **F**-критерия содержатся в таблице "Значения **F**-критерия Фишера и при уровнях значимости $\boldsymbol{\alpha}$**=5%** (верхняя строка) и $\boldsymbol{\alpha}$**=1%** (нижняя строка)". В этой таблице степени свободы для большей дисперсии $\mathbf{k_1}$ расположены в верхней строке (по горизонтали), а степени свободы для меньшей дисперсии $\mathbf{k_2}$- в первой графе (по вертикали).

Если сравниваемые выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности или из разных совокупностей с дисперсиями $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ и $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ равными друг другу: $\boldsymbol{\sigma_1^2 = \sigma_2^2}$, то величина **F**-критерия не превысит критические точки $\mathbf{F_{st}}$, указанные в таблице. Если же сравниваемые выборки взяты из разных совокупностей с их параметрами $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ и $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ не равными друг другу, то $\mathbf{F_{ф} \geq F_{st}}$ и нулевая гипотеза должна быть отвергнута.

Задача:

Пусть при лечении некоторого заболевания применяются две методики: А и В. Отобраны две однородные группы больных, первая численностью $\mathbf{n_1}$=20, а вторая-$\mathbf{n_2}$=16 человек. Известно, что соответствующие генеральные совокупности X и Y имеют нормальное распределение. Оказалось, что для обеих групп средние значения практически равны, а выборочные дисперсии: $\boldsymbol{\sigma_1^2}$ =21,5 и $\boldsymbol{\sigma_2^2}$ =32,8. Требуется сопоставить обе методики лечения при уровне значимости $\boldsymbol{\alpha}$**=0,1.**

Решение:

Дисперсия для метода А: $\boldsymbol{\sigma_1^2}$=21,5

Дисперсия для метода В: $\boldsymbol{\sigma_2^2}$=32,8

Вычисляют дисперсионное отношение $\mathbf{F}=\frac{32,8}{21,5}=1,526$

В таблице для 1**%** уровня значимости (нижняя цифра) и чисел степеней свободы $\mathbf{k_1}$=16-1=15 (см. верхнюю строку таблицы) и $\mathbf{k_2}$=20-1=19 (см. первую графу той же таблицы) находят $\mathbf{F_{st}}$=3,15

Вывод: Так как $\mathbf{F_{ф}<F_{st}}$. нулевая гипотеза остаётся в силе. Обе методики эквивалентны друг другу.

Критерий Ван-дер-Вардена.

Этот критерий относится к группе ранговых критериев, его применяют для проверки нулевой гипотезы при сравнении друг с другом независимых выборок. Техника расчётов Х-критерия Ван-дер-Вардена сводится к следующему. Сравниваемые выборки ранжируют в один общий ряд по возрастающим значениям признака. Затем каждому члену ряда присваивают порядковый номер **(R**) , отмечающий его место в общем ранжированном строю. Далее по порядковым номерам одной из выборок, обычно меньшей по объёму, находят отношение **R/(N+1), где** $\mathbf{N+1=n_1+n_2+1}$**.**

С помощью таблицы "Значения функции $\mathbf{\psi[R/(N+1)]}$ " находят значения функции $\mathbf{\psi[R/(N+1)]}$ для каждого значения **R/(N+1).** Суммируя результаты (обязательно с учётом знаков), получают величину $\mathbf{X_{ф}=\sum\psi[R/(N+1)]}$, которую сравнивают с критической точкой этого критерия $\mathbf{X_{st}}$ для принятого уровня значимости и общего числа членов сравниваемых выборок, т.е. $\mathbf{N=n_1+n_2}$ **.** Критические точки **Х**- критерия для **5%**-ного и **1%**-ного уровней значимости и общего числа членов двух выборок . $\mathbf{N=n_1+n_2}$ (с учётом разности $\mathbf{n_1-n_2}$) содержатся в таблице "Критические значения Х-критерия Ван-дер-Вардена».

Нулевая гипотеза сводится к предположению, что сравниваемые выборки извлечены из генеральных совокупностей с одинаковыми функциями распределения. Если окажется, что

$\mathbf{X_{ф} \geq X_{st}}$ **,** нулевая гипотеза должна быть отвергнута на принятом уровне значимости.

Задача:

Применяя критерий Ван-дер-Вардена определить достоверность влияния токсических свойств винилпропионата на среднее время гибели мышей на двух группах животных.

Опыт	**22**	**35**	**39**	**41**	**43**	**45**	**46**	**48**	**48**	**69**
Контр	13	14	17	22	26	27	30	32	40	55

Решение: Данные заносят в таблицу.

контр	опыт	**контроль (по возрастанию)**	**Опыт (по возрастанию)**	**R**	**R/(N+1)**	□
13	22	13		1		
14	35	14		2		
17	39	17		3		
22	41	22		4		
26	43		**22**	**5**	**0,24**	**-0,71**
27	45	26		6		
30	46	27		7		

32	48	30		8		
40	48	32		9		
55	69		**35**	**10**	**0,48**	**-0.05**
			39	**11**	**0,52**	**0,05**
		40		12		
			41	**13**	**0,62**	**0,31**
			43	**14**	**0,67**	**0,44**
			45	**15**	**0,71**	**0,55**
			46	**16**	**0,76**	**0,71**
			48	**17**	**0,81**	**0,88**
			48	**18**	**0,86**	**1,08**
		55		19		
n_1=10	**n_2=10**		**69**	**20**	**0,95**	**1,64**
					∑=	**4,9**

План решения задачи.

1. Выстраивают данные задачи в один общий возрастающий вариационный ряд.
2. Ранжируют (нумеруют **R**) полученные данные.
3. Выбирают одну выборку (обычно меньшую по объёму). Если выборки равночисленные, то выбирают любую.
4. Рассчитывают значение $\frac{R}{N+1}$ для каждого значения выбранной выборки.
5. По таблице №6 «Значение функции **φ(R/N+1)**» находят значение **φ** функции для каждого $\frac{R}{N+1}$.
6. Суммируют значения **φ** функции с учётом знаков (если получается отрицательное значение, то берут модуль этой суммы) и получают фактическое значение **$X_ф$=4.9**
7. Находят стандартное значение **X_{st}=3,86** (по таблице№7) для **P=0,95**
8. Делают вывод: **$X_ф$>Xst** , H_o-гипотеза отвергается.

Ответ: Влияние токсических свойств винилпропионата на среднее время гибели мышей достоверно.

Критерий U Манна-Уитни

Назначение критерия

Критерий предназначен для оценки различий между *двумя* независимыми выборками по *уровню* какого-либо признака, количественно измеренного. Он позволяет выявлять различия между *малыми* выборками, когда $n_1,n_2 \geq 3$ или $n_1=2$, $n_2 \geq 5$.

Описание критерия

Этот метод определяет, достаточно ли мала зона перекрещивающихся значений между двумя рядами. Чем меньше область перекрещивающихся значений, тем более вероятно, что различия достоверны. Иногда эти различия называют различиями в *расположении* двух выборок.

Эмпирическое значение критерия U отражает то, насколько велика зона совпадения между рядами. Поэтому *чем меньше* $U_{эпр}$, *тем более* вероятно, что различия *достоверны.*

Гипотезы

H_0: Уровень признака в группе 2 не ниже уровня признака в группе 1.

Графическое представление критерия U

На Рис.1 представлены три из множества возможных вариантов соотношения двух рядов значений.

В варианте (а) второй ряд ниже первого, и ряды почти не перекрещиваются. Область наложения слишком мала, чтобы скрадывать различия между рядами. Есть шанс, что различия между ними достоверны. Точно определить это можно с помощью критерия U.

В варианте (б) второй ряд тоже ниже первого, но и область перекрещивающихся значений у двух рядов достаточно обширна. Она может ещё не достигать критической величины, когда различия придётся признать несущественными. Но так ли это, можно определить только путём точного подсчета критерия U.

В варианте (в) второй ряд ниже первого, но область наложения настолько обширна, что различия между рядами скрадываются.

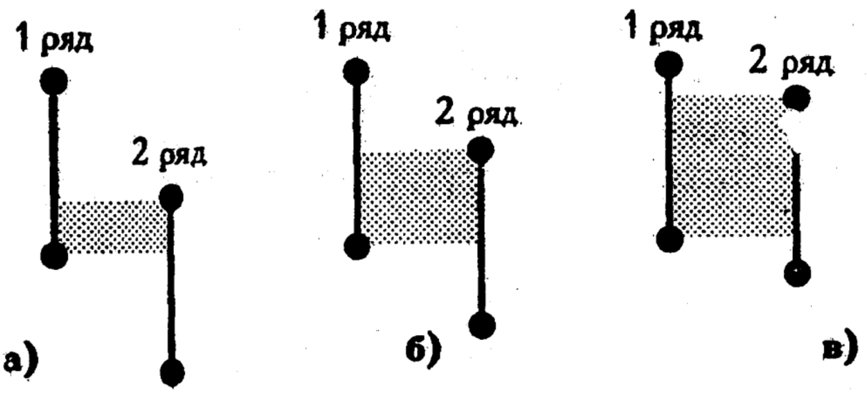


Рис1. Возможные варианты соотношений рядов значений в двух выборках; штриховкой обозначены зоны наложения.

Ограничения критерия U

1. В каждой выборке должно быть не менее 3 наблюдений: $n_1, n_2 \geq 3$; допускается, чтобы в одной выборке было 2 наблюдения, но тогда во второй их должно быть не менее 5.

2. В каждой выборке должно быть не более 60 наблюдений; $n_1, n_2 \leq 60$. Однако уже при $n_1, n_2 > 20$ ранжирование становится достаточно трудоёмким.

АЛГОРИТМ

подсчета критерия U Манна-Уитни

1. Расположить все данные обоих выборок по степени нарастания признака, не считаясь с тем, к какой выборке они относятся, как если бы мы работали с одной большой выборкой.
2. Проранжировать значения, приписывая меньшему значению меньший ранг. Всего рангов получится столько, сколько у нас (n_1+n_2).
3. Подсчитать сумму рангов отдельно по первой и второй выборке отдельно. Проверить, совпадает ли общая сумма рангов с расчетной.
4. Расчетная сумма: $\sum R_1 = \frac{N \cdot (N+1)}{2}$
5. Определить большую из двух ранговых сумм.
6. Определить значение U по формуле:

   $$U = (n_1 \cdot n_2) + \frac{n_x \cdot (n_x + 1)}{2} - T_x$$

   n_1-количество испытуемых в выборке 1

   n_2- количество испытуемых в выборке 2

   T_x-большая из двух ранговых сумм

   n_x-количество испытуемых в группе с большей суммой рангов.
7. Определить критические значения U по табл. 8.
8. Если $U_{эмп} > U_{кр}$ 0.05, H_0 принимается.
9. Если $U_{эмп} \leq U_{кр\ 0.05}$, H_0 отвергается. Чем меньше значения U, тем достоверность различий выше.

Задача:

Имеются две группы лабораторных мышей, опытная (n_1=9) и контрольная (n_1=11). Проверить с помощью критерия U Манна-Уитни, оказывает ли действие на массу тела лабораторных мышей новый лекарственный препарат.

Масса тела мышей	Опыт	75	70	64	68	72	79	76	83	80		
	контроль	71	70	66	60	62	69	73	69	60	80	78

Для решения задачи создаём таблицу:

Масса тела мышей		**Масса тела мышей (по возрастанию)**		R	O	R_o	К	R_k
О	**К**	**О**	К					
75	71		60	1,5			60	1,5
70	70		60	1,5			60	1,5
64	66		62	3			62	3
68	60	***64***		4	***64***	4		
72	62		66	5			66	5
79	69	***68***		6,5	***68***	6,5		
76	73		68	6,5			68	6,5
83	69		69	8			69	8
80	60	***70***		9,5	***70***	9,5		
	80		70	9,5			70	9,5

	78		71	11			71	11	
		72		12	***72***	12			
			73	13			73	13	
		75		14	***75***	14			
		76		15	***76***	15			
			78	16			78	16	
		79		17	***79***	17			
			80	18,5			80	18,5	
		80		18,5	***80***	18,5			
		83		20	***83***	20			
						∑=116,5		∑=93,5	

Общая сумма рангов: ∑R= 116,5+93,5=210.

Расчетная сумма: $\sum R_1 = \frac{N\cdot(N+1)}{2} = \frac{20\cdot(20+1)}{2} = 210$

Равенство реальной и расчетной сумм соблюдено.

Опытная группа имеет большую сумму рангов $\sum R_o$ =116.5.

Теперь необходимо сформулировать гипотезу H_0:

H_0: Опытная группа не превосходит контрольную группу по массе тела.

Определяем эмпирическую величину U:

$$U_{эмп} = (11\cdot 9) + \frac{9\cdot(9+1)}{2} - 116.5 = 27.5$$

По табл. 8 определяем критические значения для соответствующих n_1 и n_2, причем меньшее n принимаем за n_1 (n_1=9) и отыскиваем его в верхней строке табл.8, большее n принимаем за n_2 (n_2=11) и отыскиваем его в левом столбце табл.8. $U_{кр} = \begin{cases} 27(p \le 0.05) \\ 18(p \le 0.01) \end{cases}$

Критерий U является одним из двух исключений из общего правила принятия решения о достоверности различий, а именно мы можем констатировать достоверные различия, если $U_{эмп} \le U_{кр.}$

$U_{эмп} > U_{кр,}$ при уровне значимости 0,05 , следовательно между группами различий нет и новый лекарственный препарат не оказывает действия на массу мышей.

Критерий Хи-квадрат

Критерий Хи-квадрат применяется для проверки правильности выбранного закона распределения.

Схема вычисления критерия **<u>Хи-квадрат:</u>**

1. Определяют опытные (эмпирические) частоты встречи данной случайной величины.

f_1 f_2 f_3 … f_n

2. Выбирают закон распределения случайной величины в качестве предполагаемого и в соответствии с выбранным законом рассчитывают теоретические частоты.

$f_1{}'$ $F_2{}'$ $f_3{}'$ … $f_n{}'$

3. Находят разность между эмпирическими и теоретическими частотами.

$f_1 - f_1{}'$ $f_2 - f_2{}'$ $f_3 - f_3{}'$ … $f_n - f_n{}'$

4. Возводят в квадрат разность между эмпирическими и теоретическими частотами.

$(f_1 - f_1{}')^2$ $(f_2 - f_2{}')^2$ $(f_3 - f_3{}')^2$ … $(f_n - f_n{}')^2$

5. Находят отношение квадрата разности между эмпирическими и теоретическими частотами к теоретическим частотам.

$$\frac{(f_1 - f_1')^2}{f_1'} \quad \frac{(f_2 - f_2')^2}{f_2'} \quad \frac{(f_3 - f_3')^2}{f_3'} \quad \ldots$$

6. Находят сумму отношений квадратов разности между эмпирическими и теоретическими частотами к теоретическим частотам.

$$\frac{(f_1 - f_1')^2}{f_1'} + \frac{(f_2 - f_2')^2}{f_2'} + \frac{(f_3 - f_3')^2}{f_3'} + \ldots \frac{(f_n - f_n')^2}{f_n'}$$

7. Получают формулу критерия <u>**Хи-квадрат:**</u> $X^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f - f')^2}{f'}$

Число степеней свободы **R** при оценке эмпирических распределений, следующих нормальному закону, **R=N-3** . Если же оценке подлежит распределение, следующее закону Пуассона, число степеней свободы уменьшается на единицу, т. е. **R=N-2.** В других случаях число степеней свободы устанавливается особо.

Нулевая гипотеза сводится к предположению, что различия, наблюдаемые между эмпирическими и вычисленными частотами, носят исключительно случайный характер. Для проверки нулевой гипотезы нужно фактически полученную величину $\mathbf{X_ф^2}$ сравнить с её критическим значением $\mathbf{X_{st}^2}$, определяемом по таблице “$\mathbf{X^2}$- распределение. Критические точки для разных значений вероятности P и чисел степеней свободы-R)”.

Если $\mathbf{X_ф^2 \geq X_{st}^2}$ **,** то нулевая гипотеза должна быть отвергнута на принятом уровне значимости с числом степеней свободы R**.**

Задача:

В таблице приведены эмпирические (f) и вычисленные по нормальному закону(f′) частоты распределения длины тела у 267 мужчин. Применяя критерий **Хи-квадрат** выяснить, следует ли это распределение нормальному закону.

Решение:

Частоты		f-f′	(f-f′)^2	$\frac{(f-f')^2}{f'}$
f-опытные	f′-теоретическ.			
12	11.6	0.4	0.16	0.01
31	34.3	3.3	10.89	0.32

71	67.8	3.2	10.24	0.15
82	77.6	4.4	19.36	0.25
46	51.2	5.2	27.04	0.53
19	19.5	0.5	0.25	0.01
6	5	1.0	1.00	0.20
∑=267	∑=267		∑=	**1.47**

Расчёт значения **Хи-квадрат** критерия дал результат **1.47**.
В данном случае число степеней свободы **R =7-3=4**. Исходя из **5%**-ного уровня значимости из таблицы "$\mathbf{X^2}$- распределение. Критические точки для разных значений вероятности P и чисел степеней свободы-k) находим $\mathbf{X_{st}^2=9.49}$
Эта величина значительно превышает $\mathbf{X_ф^2=1.47}$**,** что не позволяет отвергнуть H_0-гипотезу.
Следовательно, существуют достаточные основания для утверждения, что данное распределение следует нормальному закону.

Многофункциональные статистические критерии

Многофункциональные статистические критерии – это критерии, которые могут использоваться по отношению к самым разнообразным данным, выборкам и задачам.

1. Данные могут быть представлены в любой шкале, начиная от номинативной (шкалы наименований).

2. Выборки могут быть как независимыми, так и «связанными», то есть мы можем с помощью многофункциональных критериев сравнивать и разные выборки испытуемых, и показатели одной и той же выборки, измеренные в разных условиях. Нижние границы выборок – 5 наблюдений, но возможно применение критериев и по отношению к выборкам n=2, с некоторыми оговорками.

3. В критерии φ*Фишера верхней границы не существует – выборки могут быть насколько угодными большими.

К числу многофункциональных критериев относится критерий φ*Фишера (угловое преобразование Фишера).
Многофункциональные критерии построены на сопоставлении долей выраженных в долях единицы или в процентах. Суть критериев состоит в определении того, какая доля наблюдений (реакций, выборов, испытуемых) в данной выборке характеризуется интересующим исследователя эффектом и какая доля этим эффектом не характеризуется.
Критерий φ* применяется в тех случаях, когда обследованы две выборки испытуемых.

Критерий φ^* - угловое преобразование Фишера

Критерий Фишера предназначен для сопоставления двух выборок по частоте встречаемости интересующего исследователя эффекта.

Описания критерия

Критерий оценивает достоверность различий между процентными долями двух выборок, в которых зарегистрирован интересующий нас эффект.

Суть углового преобразования Фишера состоит в переводе процентных долей в величины центрального угла, который измеряется в радианах. Большей процентной доле будет соответствовать больший угол φ, а меньшей доле – меньший угол, но соотношения здесь не линейные:

$$\varphi = 2 \times \arcsin\left(\sqrt{P}\right)$$

Где P – процентная доля, выраженная в долях единицы

При увеличении расхождения между углами φ_1, φ_2 и увеличения численности выборок значение критерия возрастает. Чем больше величина φ^*, тем более вероятно, что различия достоверны.

Гипотезы:

H_0: Доля лиц, у которых проявляется исследуемый эффект, в выборке 1 не больше, чем в выборке 2.

Ограничения критериев φ^*

1. Ни одна из сопоставляемых долей не должна быть равной нулю. Формально нет препятствий для применения метода φ в случаях, когда доля наблюдений в одной из выборок равна 0. Однако в этих случаях результат может оказаться неоправданно завышенным.

2. Верхний предел в критерии φ отсутствует – выборки могут быть сколь угодно большими.

3. Нижний предел – 2 наблюдения в одной из выборок. Однако должны соблюдаться следующие соотношения в численности двух выборок:

   а) если в одной выборке всего 2 наблюдения, то во второй должно быть не менее 30:
   $n_1 = 2 \rightarrow n_2 \geq 30$;
   б) если в одной из выборок всего 3 наблюдения, то во второй должно быть не менее 7:
   $n_1 = 3 \rightarrow n_2 \geq 7$;
   в) если в одной из выборок всего 4 наблюдения, то во второй должно быть не менее 5:
   $n_1 = 4 \rightarrow n_2 \geq 5$;
   г) при n_1 , $n_2 \geq 5$ возможны любые сопоставления;

В принципе возможно и сопоставление выборок, не отвечающих этому условию, например, соотношением $n_1 = 2$, $n_2 = 15$, но в этих случаях не удастся выявить достоверных различий.

Других ограничений у критерия φ^* нет.

Пример 1 - сопоставления выборок по качественно определяемому признаку
В данном варианте использования критерия мы сравниваем процент испытуемых в одной выборке, характеризующиеся каким-либо качеством, с процентом испытуемых в другой выборке, характеризующихся тем же качеством.
Допустим, нас интересует, различаются ли две группы студентов по успешности решения новой экспериментальной задачи. В первой группе из 20 человек с нею справилось 12 человек, а во второй выборке из 25 человек – 10. В первом случае процентная доля решивших задачу составит 12/20*100% = 60%, а во второй 10/25*100% = 40%. Достоверно ли различаются эти процентные доли при данных n_1 и n_2?
Казалось бы, и «на глаз» можно определить, что 60% значительно выше 40%. Однако на самом деле эти различия при данных n_1 , n_2 недостоверны.
Проверим это. Поскольку нас интересует факт решения задачи, будем считать «эффектом» успех в решении экспериментальной задачи, а отсутствие эффекта- неудачу в ее решении.
Сформулируем нулевую гипотезу.
H_0: Доля лиц, справившихся с задачей, в первой группе не больше, чем во второй группе.
Теперь построим так называемую четырехклеточную, или четырехпольную таблицу, которая фактически представляет собой таблицу эмпирических частот по двум значениям признака: «есть эффект» - «нет эффекта».
Четырехклеточная таблица для расчета критерия при сопоставлении двух групп испытуемых по процентной доле решивших задачу.

группы	**«есть эффект»: задача решена**			**«нет эффекта»: задача не решена**			**Суммы**
	количество испытуемых	**% доля**		**количество испытуемых**	**% доля**		
1 группа	**12**	**(60%)**	**А**	**8**	**(60%)**	**Б**	**20**
2 группа	**10**	**(40%)**	**В**	**15**	**(40%)**	**Г**	**25**
суммы	**22**			**23**			**45**

В четырехклеточной таблице, как правило, сверху отмечаются столбцы «есть эффект» и «нет эффекта», а слева – строки «1 группа» и «2 группа». Участвуют в сопоставлениях, собственно, только поля (ячейки) А и В, то есть процентные доли по столбцу « Есть эффект».
По табл. 10 определяем величины φ, соответствующие процентным долям в каждой из групп.
$\varphi_{1(60\%)} = 1{,}772$
$\varphi_{2(40\%)} = 1{,}396$
Теперь подсчитаем эмпирическое значение φ^* по формуле:

$$\varphi* = (\varphi 1 - \varphi 2) * \sqrt{\frac{n1 * n2}{n1 + n2}}$$

Где φ_1 – угол, соответствующий большей % доле;

φ_2 – угол, соответствующий меньшей % доле;

n_1 – количество наблюдений в выборке 1;

n_2 – количество наблюдений в выборке 2;

В данном случае:

$$\varphi *= (1{,}772 - 1{,}396) * \sqrt{\frac{20 * 25}{20 + 25}} = 0{,}403 * \sqrt{11{,}11} = 1{,}34$$

По Табл.9 определяем, какому уровню значимости соответствует $\varphi^*_{эмп} = 1{,}34$: P = 0,09

Алгоритм расчета критерия φ*

1. Определить те значения признака, которые будут критерием для разделения испытуемых на тех, у кого «есть эффект» и тех, у кого «нет эффекта».
2. Начертить четырехклеточную таблицу из двух столбцов и двух строк. Первый столбец – «есть эффект»; второй столбец – «нет эффекта»; первая стока сверху – 1 группа (выборка1); вторая строка – 2 группа (выборка2).
3. Подсчитать количество испытуемых в первой группе, у которых «есть эффект», и занести это число в левую верхнюю ячейку таблицы.
4. Подсчитать количество испытуемых в первой выборке, у которых «нет эффекта», и занести это число в правую верхнюю ячейку таблицы.
5. Подсчитать сумму по двум верхним ячейкам. Она должна совпадать с количеством испытуемых в первой группе.
6. Подсчитать количество испытуемых во второй группе, у которых «есть эффект», и занести это число в левую нижнюю ячейку таблицы.
7. Подсчитать количество испытуемых во второй выборке, у которых «нет эффекта», и занести это число в правую нижнюю ячейку таблицы. Подсчитать сумму по двум нижним ячейкам. Она должна совпадать с количеством испытуемых во второй группе (выборке).
8. Определить процентные доли испытуемых, у которых «есть эффект», путем отнесения их количества к общему количеству испытуемых в данной группе (выборке). Записать полученных процентные доли соответственно в левой верхней и левой нижней ячейках таблицы в скобках, чтобы не перепутать их с абсолютными значениями.
9. Проверить, не равняется ли одна из сопоставляемых процентных долей нулю. Если это так, отказаться от критерия φ* и использовать критерий χ2.
10. Определить по табл.10 величины углов φ для каждой из сопоставленных процентных долей.
11. Подсчитать эмпирическое значение φ* по формуле:
12. где: φ1– угол, соответствующий большей процентной доле;

    φ2- угол, соответствующий меньшей процентной доле;

    n_1 – количество наблюдений в выборке 1;

    n_2 – количество наблюдений в выборке 2.

$$\varphi^* = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

13. Сопоставить полученные значения φ* с критическими значениями: $\varphi^* \leq 1{,}64$ ($\rho \leq 0{,}05$) и $\varphi^* \leq 2{,}31$ ($\rho \leq 0{,}01$).

Если $\varphi^*_{эмп} \geq \varphi^*_{кр}$, H_0 отвергается.

При необходимости определить точный уровень значимости полученного $\varphi^*_{эмп}$ по табл. 9.

Задачи для самостоятельного решения.

14.1 Для определения pH использовались 2 типа электродов.

Тип электрода	**Показания pH**			
	5,78	5,74	5,84	5,8
2	5,82	5,87	5,96	5,89

Применяя **t**-критерий Стьюдента определить, следует ли отбросить нулевую гипотезу?

14.2 Изучено общее содержание азота в плазме крови крыс-альбиносов в возрасте 37 и180 дней. Результаты выражены в граммах на 100см^3 плазмы.

Возраст	1	2	3	4	5	6	7	8	9
37	0,98	0,83	0,99	0,86	0,9	0,81	0,94	0,92	0,87
180	1,2	1,18	1,33	1,21	1,2	1,07	1,13	1,12	1,3

Применяя **t**-критерий Стьюдента определить достоверность влияния возраста на содержание азота в плазме крови крыс-альбиносов.

14.3 У 12 работающих на ультразвуковых установках изучалось содержание сахара в крови натощак до работы и через 3 часа после работы. Определить достоверность влияния ультразвуковых установок на снижение сахара в крови, используя **t**-критерий Стьюдента.

Натощак	98	82	99	72	79	82	64	70	88	66	88	81
После 3-х час.раб.	54	67	96	59	79	76	66	66	48	61	61	50

14.4 Изучалось влияние на величину веса щитовидной железы белых крыс раздражения животных во время кормления слабым электрическим током. Получены следующие данные о весе (в мг) щитовидной железы указанных животных и животных контрольной группы, не подвергавшихся раздражению:

Опытная	**16**	**21**	**16**	**16**	**35**	**24**	**23**	**23**	**16**
Контрольная	19	10	12	13	9	8	15	13	12

Используя **t**-критерий Стьюдента, определить, являются ли различия в весе щитовидной железы животных сравниваемых групп статистически значимыми.

14.5 На двух группах крыс поставлен опыт по сравнению влияния разных рационов на рост. Крысы первой группы получали рацион с высоким содержанием белка, крысы второй - с низким. Привесы за 56 дней опыта для каждой крысы составили в (г):

Высокобелк. рацион	**134**	**146**	**104**	**119**	**124**	**161**	**107**
Низкобелк. рацион	70	118	101	85	107	132	94

Пользуясь **t**-критерием Стьюдента определить достоверность влияния высокобелкового рациона на рост крыс.

14.6 На двух группах лабораторных мышей опытной и контрольной изучалось влияние на организм нового препарата. После месячных испытаний масса тела животных (г) варьировала следующим образом:

Опыт	80	76	75	64	70	72	68	79	83
Контроль	70	78	60	80	62	68	73	60	71

Используя **t** -критерий Стьюдента определить достоверность влияния на организм нового препарата.

14.7 Пользуясь **t**-критерием Стьюдента, определить достоверно ли изменение содержания **Na** в сыворотке крови кроликов с атеросклерозом на 10-й день после перевязки коронарной артерии и 9 дневного введения нероболила.

До опыта	407	420	420	326	379	474	474	499	387	449
После опыта	382	331	360	357	350	439	450	405	382	373

14.8 Определялось содержание сиаловой кислоты больных инфарктом миокарда, поступивших на лечение в сроки до 3-х (X) дней и позднее 6-ти дней (Y) от начала заболевания:

X	240	235	270	280	185	287	148
Y	314	270	220	226	230	305	278

Определить достоверность влияния сроков заболевания на содержание сиаловой кислоты в крови используя **t**-критерий Стьюдента.

14.9 Температура тела разнополых тушканчиков оказалась следующей:

У самцов	**37,5**	**37,9**	**37,4**	**37,8**	**36,8**	**37,8**	**37,5**
У самок	37,8	38,1	37,0	37,5	37,7	37,8	37,6

Используя **t**-критерий Стьюдента, определить, отличаются ли самцы и самки по температуре тела.

14.10 Следующие данные основаны на результатах сравнительного исследования средней концентрации свинца в крови (в мг/100г) группы рабочих аккумуляторного завода, подвергавшихся профессиональному воздействию-(X) и группы рабочих текстильной фабрики не подвергавшихся профессиональному воздействию-(Y).

X	**0.082**	**0.080**	**0.079**	**0.069**	**0.085**	**0.090**	**0.086**
Y	0.040	0.035	0.036	0.039	0.041	0.046	0.043

Применяя t-критерий Стьюдента, определить, есть ли различие в среднем содержании свинца в сыворотке крови у рабочих двух предприятий.

14.11 Определение содержания основного фармакологически активного вещества в жидком лекарственном препарате двумя методами – дало следующие результаты:

1	98,2	98,30	98,30	98,40	98,40	98,40	98,50	98,50	98,60
2	98,3	98,40	98,40	98,50	98,50	98,60	98,60	98,70	98,70

С помощью критерия Фишера сравнить оба метода при доверительной вероятности P=0.95.

14.12 Измерения пульса 10 больных, проведенные после некоторой процедуры, и 12 больных контрольной группы дали следующие результаты: для 1-ой группы $\overline{X}$ =70 уд/мин, для 2-ой $\overline{Y}$ =68 уд/мин; дисперсии соответственно - σ^2_x=9 и σ^2_y=4. При уровне значимости $\alpha = 0,05$ с помощью критерия Фишера проверить, значимо ли различие пульса у больных этих групп.

14.13 Для определения содержания хлора в химическом соединении были применены методы А и В. Результаты даны в %. Применить **F-**критерий Фишера для сравнения методов А и В.

A	**27,5**	**27,0**	**27,3**	**27,6**	**27,8**			
B	27,9	26,5	27,2	26,3	27,0	27,4	27,3	26,8

14.14При определении влияния фактора А на потребление кислорода кроликами по одной методике была получена величина дисперсии $\boldsymbol{\sigma}_1^2$ =11,6. Вторая методика дала значение $\boldsymbol{\sigma}_2^2$=4,3. Численность первой и второй групп кроликов соответственно равно: $\mathbf{n}_1$=8, $\mathbf{n}_2$=14.Требуется установить, существенно ли различие этих дисперсий, т. е эквивалентны ли обе методики по точности?

14.15 Применить критерии Ван-дер-Вардена и Манна-Уитни для оценки значимости различия между % фагоцитировавших лейкоцитов у морских свинок, сенсибилизированных лошадиной сывороткой (X) и в контроле (Y). Сравнить результаты.

X	**2**	**6**	**8**	**8**	**10**	**14**
Y	22	32	36	54		

14.16 Изучалось влияние на поглотительные способности ретикулоэндотелиальной системы витамина $\mathbf{B}_{12}$.Получены данные:

Опыт.	**28**	**29**	**33**	**34**	**35**	**36**	**39**	**48**	**50**	**53**	**54**	**57**

Контр.	40	48	50	50	51	53	55	59	60	60	62	84

Применить критерии Ван-дер-Вардена и Манна-Уитни для определения достоверности влияния витамина **В**$_{12}$ на поглотительную способность ретикулоэндотелиальной системы. Сравнить результаты.

14.17 Изучалось влияние кобальта на массу тела кроликов. Опыт проводился на двух группах животных: опытной и контрольной. Опытные кролики ежедневно получали добавку к рациону в виде водного раствора по 0.06г хлористого кобальта на 1 кг живой массы тела. Проанализировать с помощью X- критерия Ван-дер- Вардена и Манна-Уитни результаты о влиянии кобальта на величину массы тела кроликов.

Контроль	**420**	**470**	**490**	**504**	**530**	**560**	**580**	**580**
Опыт	561	580	621	630	640	680	692	700

14.18 Применяя критерии Ван-дер-Вардена и Манна-Уитни, определить достоверность влияния токсических свойств винилпропионата на среднее время гибели мышей. Сравнить результаты.

Опытная	**22**	**35**	**39**	**41**	**43**	**45**	**46**	**48**	**48**	**69**
Контрольная	13	14	17	22	26	27	30	32	40	55

14.19 На двух группах лабораторных мышей-опытной (n_1=9) и контрольной (n_2=11) изучали влияние на массу нового препарата. После месячных испытаний масса тела животных, выраженная в граммах, варьировала следующим образом:

Опыт	**80**	**76**	**75**	**64**	**70**	**68**	**72**	**79**	**83**		
Контроль	70	78	60	80	62	68	73	60	71	66	69

Применяя критерии Ван-дер-Вардена и Манна-Уитни оценить эффективность воздействия нового препарата на организм мышей.

14.20 Получены данные о весе разнополых тушканчиков (X-самцы, Y-самки).

X	**186**	**190**	**165**	**182**	**182**	**180**	**173**	**157**	**179**	**164**	**146**	**173**	**144**	**156**	**156**
Y	162	163	190	188	147	145	157	162	186	175	147	145	145	155	174

Применяя критерии Ван-дер_Вардена и Манна-Уитни определить, отличаются ли самцы от самок по весу. Сравнить результаты.

14.21 Дан вариационный ряд распределения початков кукурузы по длине (в мм) и теоретически вычисленный ряд в соответствии с нормальным распределением. Применяя критерий **хи**-квадрат, определить, подчиняется ли длина початков кукурузы нормальному закону.

Длина	100	110	120	130	140	150	160	170
Фактические частоты	17	39	44	60	42	34	29	18
Теоретические частоты	15	29	45	55	54	43	27	14

14.22 Изучалась поражаемость клеток при облучении ткани животного организма альфа – частицами. Проведено 517 испытаний. Теоретические значения частот вычислены по закону Пуассона. Результаты распределились следующим образом:

Число пораженных клеток	0	1	2	3	4	5	6	7
Частота поражений	112	168	130	68	32	5	1	1
Теоретические частоты	115	173	130	65	24	7	2	1

Применяя критерий **ХИ**-квадрат, определить, подчиняется ли поражаемость клеток при облучении ткани животного организма альфа-частицами закону Пуассона.

14.23 Урожай фасоли, полученный на делянках крупных f1 и мелких f2 семян, распределяется следующим образом:

Масса	125	175	225	275	325	375	425	475	525
f1	1	5	17	45	70	51	10	1	0
f2	1	3	7	22	88	69	7	2	1

Применяя критерий **хи**-квадрат, определить, какой характер различий между частотами этих рядов - случайный или систематический.

14.24 В таблице приведены эмпирические и вычисленные по нормальному закону частоты распределения длины тела у 267 мужчин.

Эмпирические	**12**	**31**	**71**	**82**	**46**	**19**	**6**
Теоретические	11,6	34,3	67,8	77,6	51,2	51,2	19,5

Пользуясь критерием **ХИ**-квадрат, выяснить, случайны или достоверны различия между частотами.

14.25 Даны частоты значений сердечного индекса X (л/мин.м^2) по интервалам и ожидаемые частоты, посчитанные в предположении, что сердечный индекс является нормальной величиной. Используя критерий **хи**-квадрат, определить, является ли сердечный индекс нормальной случайной величиной.

Интервал	**Наблюдаемая Частота**	**Ожидаемая Частота**
0-0,5	1	7,83
0,5-1,0	9	7,38
1,0-1,5	23	11,2
1,5-2,0	17	14,67
2,0-2,5	13	16,80
2,5-3,0	12	16,46
3,0-3,5	10	14
3,5-4,0	9	10,42

4,0-4,5	9	6,61
4,5-5,0	3	3,81
5,0-5,5	3	3,81

14.26 В препарате через равные промежутки времени регистрируется число бактерий, попавших в поле зрения микроскопа. Получены следующие данные:

I	0	1	2	3	4	5	6	7
Наблюдаемые	112	168	130	68	32	5	1	1
Ожидаемые	115	173	130	65	24	7	2	2

Используя критерий ХИ^2-критерий проверить при уровне значимости 0,05,что число бактерий, попадающих в поле зрения микроскопа в любой момент регистрации, распределено по закону Пуассона.

14.27 Загрудинные боли наблюдались у 98 больных из 100 обследованных, а через месяц после лечения у 91 больного. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.28 Загрудинные боли наблюдались у 98 больных из 100 обследованных, а через год после лечения у 65 больных. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.29 Загрудинные боли наблюдались у 88 больных из 98 обследованных, а через месяц после лечения у 81 больного. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.30 Одышка наблюдалась у 84 больных из 100 обследованных, а через месяц после лечения у 71 больного. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.31 Одышка наблюдалась у 84 больных из 98 обследованных, а через год после лечения у 75 больных. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.32 Перебои в работе сердца наблюдались у 37 больных из 88 обследованных, а через месяц после лечения у 31 больных. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.33 Перебои в работе сердца наблюдались у 37 больных из 98 обследованных, а через месяц после лечения у 33 больных. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.34 Перебои в работе сердца наблюдались у 67 больных из 98 обследованных, а через год после лечения у 53 больных. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.35 Перебои в работе сердца наблюдались у 67 больных из 98 обследованных, а через два года после лечения у 57 больных. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.36 Сердцебиение наблюдалось у 67 больных из 88 обследованных, а через месяц после лечения у 53 больных. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.37 Сердцебиение наблюдалось у 80 больных из 89 обследованных, а через год после лечения у 53 больных. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.38 Сердцебиение наблюдалось у 77 больных из 85 обследованных, а через два года после лечения у 53 больных. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.39 Повышенное давление наблюдалось у 45 больных гипертонией в одной группе из 99 человек, а в другой группе у 23 больных из 47. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.40 Повышенное давление наблюдалось у всех больных гипертонией в одной группе из 99 человек, а через месяц после лечения у 23 больных из 47. Используя угловой критерий Фишера определить эффективность применяемого препарата.

14.41 Аллергическая реакция наблюдалась у 53 больных в группе из 100 человек больных астмой, а в другой группе у 49 больных из 70человек. Используя угловой критерий Фишера определить, есть ли разница между этими группами.

14.42 Аллергическая реакция наблюдалась у 73 больных в группе из 100 человек больных астмой, а в другой группе у 45 больных из 70человек. Используя угловой критерий Фишера определить, есть ли разница между этими группами.

14.43 Аллергическая реакция наблюдалась у 65 больных в группе из 100 человек больных астмой, а в другой группе у 44 больных из 70человек. Используя угловой критерий Фишера определить, есть ли разница между этими группами.

15. Дисперсионный анализ.

Сущность его заключается в установлении роли отдельных факторов в изменчивости того или иного признака. Дело в том, что влияние тех или иных факторов на изучаемый признак не может быть выделено в чистом виде, различные опыты дают несколько неодинаковые результаты. Объясняется это тем, что на них влияют многочисленные случайные обстоятельства, многие другие факторы, несколько меняющиеся от опыта к опыту и не поддающиеся контролю. Вот почему возникает важная задача разложения общей изменчивости признака на составные части, с одной стороны, определяемые изучаемым конкретным фактором, а с другой – вызываемые случайными неконтролируемыми причинами.

Дисперсионный анализ позволяет оценивать значимость влияния отдельных факторов, а так же их относительную роль в общей изменчивости признака.

В фактическом отклонении варианты от средней генеральной совокупности фигурируют два компонента:

- та часть отклонения, которая зависит именно от данного фактора –**A;**
- остаточная часть, независящая от данного фактора **-е.**

В таком случае можно сравнивать **A** и **е.**

При достоверном влиянии изучаемого фактора значение **A** будет превышать значение **е.**

По степени превышения **A** над **е** можно судить о том, насколько достоверно влияние данного фактора.

Разберём простейшую схему, когда анализируется влияние одного фактора, могущего принимать разные градации, или количественные уровни: **1,2,3… i …a**.

Отдельные наблюдения (варианты) разбиваются на группы согласно этим градациям фактора. Количество наблюдений в одном уровне: **1,2,3 …j …n.** Общее количество наблюдений равно **N=a·n.**

Распределение вариант при различии по одному фактору представлено в таблице: n-число наблюдений в каждой группе;
a-количество групп (уровней фактора А);
N-количество всех вариант (N= n·a);
i-разные уровни;
j-разные наблюдения.

A	**Отдельнае варианты (наблюдения)**						**$\sum X_i=T_i$**	**T_i^2**
	1	2	…	j	…	N		
1	X_{11}	X_{12}		X_{1j}		X_{1n}	$\sum X_1=T_1$	T_1^2
2	X_{21}	X_{22}		X_{2j}		X_{2n}	$\sum X_2=T_2$	T_2^2
:								
I	X_{i1}	X_{i2}		X_{ij}		X_{in}	$\sum X_i=T$	T_i^2

							i	
:								
a	X_{a1}	X_{a2}		X_{aj}		X_{an}	$\sum X_a = T_a$	T_a^2
							$\sum T_i = T$	$\sum T_i^2 =$
							$T^2 =$	

Найдём сумму квадратов, составив дополнительную таблицу($\sum X_{ij}^2$).

X_{11}^2	X_{12}^2	…	X_{1j}^2	…	X_{1n}^2
X_{21}^2	X_{22}^2	…	X_{2j}^2	…	X_{2n}^2
…	….	…	…	…	
X_{i1}^2	X_{i2}^2	…	X_{ij}^2	…	X_{in}^2
…	…	…		…	
X_{a1}^2	X_{a2}^2	…	X_{aj}^2	…	X_{an}^2

Степени свободы:

1. Для общей дисперсии **k_0=N-1, где N=a·n**
2. Для факториальной дисперсии **K_A=a-1**
3. Для остаточной дисперсии **K_e=N-a**

Формулы для вычисления дисперсий.

Общая дисперсия $\sigma_0^2 = \frac{1}{N-1}(\sum X_{ij}^2 - \frac{T^2}{N})$

Факториальная дисперсия $\sigma_A^2 = \frac{1}{a-1}(\sum \frac{T_i^2}{n} - \frac{T^2}{N})$

Остаточная дисперсия $\sigma_e^2 = \frac{1}{N-a}(\sum X_{ij}^2 - \sum \frac{T_i^2}{n})$

Нулевая гипотеза.

При дисперсионном анализе следует исходить из первоначально принимаемой нулевой гипотезы, что данный фактор А не влияет на изменчивость данного признака.

Если правильна нулевая гипотеза, то σ_A^2 должна быть равна нулю, т.е. вся вариация сводится только к случайной. Для того, чтобы отбросить нулевую гипотезу, нужно доказать, что σ_A^2 – достоверно (т. е. с вероятностью, не меньше, чем 0.95, или с α=0.05) отличается от нуля. Достоверность значения - σ_A^2 может быть установлена путём деления на ошибку, т. е. на σ_e^2: $F = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_t^2}$

Количественная оценка влияния отдельных факторов.

Наряду с доказательством влияния того или иного фактора на результативный признак, часто возникает необходимость установления меры этого влияния и его доли в сумме влияния всех факторов. Доля влияния фактора **А** равна:

$$P_A = \frac{\sigma_A^2 - \sigma_e^2}{\sigma_A^2 + \sigma_e^2(n-1)}$$

Задача:

Получены следующие данные о содержании каратиноидов (в мг/кв.дм) в листьях канатика в разное время суток. Влияет ли время суток на содержание каратиноидов?

Часы суток	**1**	**2**	**3**	**4**
15	1,41	0,95	1,00	0,93
18	1,17	1,10	0,84	1,01
21	1,38	1,38	0,91	1,36
24	0,62	0,48	0,43	0,62
6	0,74	0,41	0,41	0,43
9	0,76	0,59	0,74	0,46
12	0,64	1,02	1,04	0,98

Решение:

Данные заносят в таблицу и делают расчёты.

A	**Отдельные наблюдения. n**				**$T_i = \sum X_i$**	**T_i^2**
	1	2	3	4		
1	1,41	0,95	1,00	0,93	4,29	18,4041
2	1,17	1,10	0,84	1,01	4,12	16,9744
3	1,38	1,38	0,91	1,36	5,03	25,3009
4	0,62	0,48	0,43	0,62	2,15	4,6225
5	0,74	0,41	0,41	0,43	1,96	3,9601
6	0,76	0,59	0,74	0,46	2,55	6,5025
7	0,64	1,02	1,04	0,98	3,68	13,5421
					T=23,81	**$\sum T_i^2$=89,3**

T^2=566,9

Схема решения задачи на дисперсионный анализ:

1.Суммируют данные задачи по каждому уровню фактора A (**T_i**).

2.Находят общую сумму (**$\sum T_i$**) по всем уровням и получают значение (**T).**

3. Возводят в квадрат общую сумму (**$\sum T_i$**) и получают значение **T^2**

4. Возводят полученные суммы (**T_i**) в квадрат и получают значения (**T_i^2**) по каждому уровню.

5. Находят общую сумму (**$\sum T_i^2$**)

6.Находят сумму квадратов данных задачи, составив дополнительную таблицу.

			$\sum X_{ij}^2$=	**22,9363**
1,9881	0,9025	1,00	0,8649	4,7555
1,3689	1,21	0,7056	1,0201	4,3046
1,9044	1,9044	0,8281	1,8496	6,4865
0,3844	0,2304	0,1849	0,3844	1,1841
0,5446	0,1681	0,1681	0,1849	1,6163
0,5776	0,3481	0,5476	0,2116	1,6849
0,4096	1,0404	1,0816	0,9604	3,492

7. Определяют число степеней свободы:

1. Для общей дисперсии **k_0=N-1=28-1=27**
2. Для факториальной дисперсии **K_A=a-1=7-1=6**
3. Для остаточной дисперсии **K_e=N-a=28-7-21**

8. Рассчитывают дисперсии:

Общая дисперсия : $\sigma_0^2 = \frac{1}{N-1}(\sum X_{ij}^2 - \frac{T^2}{N})$

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{27} \cdot (22{,}7316 - \frac{566{,}9161}{28}) = 0{,}092$$

Факториальная дисперсия $\sigma_A^2 = \frac{1}{a-1}(\sum \frac{T_i^2}{n} - \frac{T^2}{N})$

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{6} \cdot (\frac{89{,}3069}{4} - 20{,}2470) = \frac{2{,}0797}{6} = 0{,}3466$$

Остаточная дисперсия $\sigma_e^2 = \frac{1}{N-a}(\sum X_{ij}^2 - \sum \frac{T_i^2}{n})$

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{21} \cdot (22{,}7316 - \frac{89{,}3063}{4}) = 0{,}0193$$

9. Находят фактическое значение F-критерия Фишера:
$F_ф$ =0,3466/0,0193=18

10. Находят стандартное значение F-критерия Фишера (по таблице №4) **F_{st}** =3,84 при уровне значимости 0,01 и числа степеней свободы для большей дисперсии (**K_A=7-1=6)** и меньшей дисперсии (**K_e=28-7=21).**

11. Сравнивают фактически найденное значение F-критерия Фишера со стандартным значением и делают вывод.

$F_ф \geq F_{st}$, нулевую гипотезу отвергают на 1% уровне значимости.

Вывод: С вероятностью более 0,99 можно заключить, что время суток влияет на содержание каратиноидов в листьях канатика.

12. Определяют степень влияния фактора А по формуле: $P = \frac{\sigma_A^2 - \sigma_e^2}{\sigma_A^2 + \sigma_e^2(n-1)}$

$$P = \frac{0,3466 - 0,0193}{0,3466 + 0,0193(4-1)} = 0,81$$

P=0,81 –Это означает, что примерно около 81% от общего варьирования содержания каратиноидов в листьях канатика обусловлено влиянием времени суток

Ответ:

1. С вероятностью более 0,99 можно заключить, что время суток влияет на содержание каратиноидов в листьях канатика.
2. Сила влияния фактора А на результативный признак равна P=0,81.

Двухфакторный дисперсионный анализ

Пример:

С помощью дисперсионного анализа. Выявить влияние реагентов А и В на синтез лекарственного препарата.

Уровни А	Уровни В			
	$B_1 = 1$	$B_2 = 2$	$B_3 = 3$	$B_4 = 4$
3	7,5	3,0	4,0	3,5
6	3,5	2,5	3,5	2,0
9	6,5	5,5	4,5	6,0
11	7,5	7,0	8,5	7,0

Решение:

Данные занесем в таблицу и сделаем расчеты:

В / А	1	2	3	4 n=4	T_j	T_j^2
1	7,5	3,0	4,0	3,5	15	225
2	3,5	2,5	3,5	2,0	11,5	132,25
3	6,5	5,5	4,5	6,0	22,5	506,25
4 a=4	7,5	7,0	8,5	7,0	30	900
T_i	22	18	20,5	18,5	$\sum T_i=79$ $\mathbf{T^2=6241}$	$\mathbf{\sum T^2_j=1763,5}$
T_i^2	484	324	420,25	342,25	$\mathbf{\sum T_i^2=1570,5}$	

Найдем сумму квадратов, составив дополнительную таблицу: $\mathbf{\sum X_{ij}^2=483,5}$

56,25	9	16	12,25
12,25	6,25	12,25	4
42,25	30,25	20,25	36
56,25	49	72,25	49

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{n(a-1)} \cdot (\sum T_{jj_i}^2 - \frac{T^2}{a}) = \frac{1}{4 \cdot 3}(1763,5 - \frac{6241}{4}) = 16,9$$

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{a(n-1)} \cdot (\sum T_i^2 - \frac{T^2}{n}) = \frac{1}{4 \cdot 3}(1570,5 - \frac{6241}{4}) = 0,85$$

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{(n-1)(a-1)} \cdot (\sum X_{ij}^2 - \frac{\sum T_i^2}{a} - \frac{\sum T_i^2}{n} + \frac{T^2}{a \cdot n}) = 0,45$$

$F_ф{}^A = \frac{16{,}9}{0{,}45} = 37{,}5$ $\qquad F_ф{}^B = \frac{0{,}85}{0{,}45} = 1{,}89$

Степени свободы R_A=m-1= 3; R_B=n-1=3; R_e=(n-1)(m-1)=9→ F_{st}=3,86 (α=5%).

Вывод: 1. $F_ф{}^A \geq F_{st}$→гипотеза H_0 отвергается, реагент А влияет на выход препарата.

Степень влияния фактора $P = \frac{\sigma_A^2 - \sigma_e^2}{\sigma_A^2 + \sigma_e^2(n-1)}$ =0,90

2. $F_ф{}^B < F_{st}$→гипотеза H_0 сохраняется, реагент В не влияет на выход препарата.

Задачи для самостоятельного решения на дисперсионный анализ.

15.1 Исследовали интенсивность распада белка в организме обожженных собак при введении нормальной и иммунной сыворотки. Используя метод дисперсионного анализа, определить достоверность влияния иммунной сыворотки на снижение интенсивности распада белка у обожженных собак.

Вид сыворотки	**№ испытания**			
	1	**2**	**3**	**4**
Нормальная сыворотка	0,316	0,328	0,214	0,252
Иммунная сыворотка	0,204	0,216	0,167	0,156

15.2. Изучалось продолжительность развития эмбриона (в днях) кроликов разных пород. Влияет ли породность на продолжительность развития эмбриона?

Породы	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Альбиносы	30	36	31	30	34	32	34	32	33	32
Шиншилла	31	32	30	34	32	31	30	31	30	31
Голландские	30	29	30	31	30	30	31	30	31	31
Польские	30	31	29	30	29	30	29	31	29	30

15.3 Получены следующие данные о содержании хлорофилла (в мг/кв.дм) в листьях канатика в разное время суток. Влияет ли время суток на содержание хлорофилла?

Часы суток	**1**	**2**	**3**	**4**
15	3,06	2,88	2,83	2,41
18	3,20	2,97	2,50	3,03
21	1,82	1,73	1,33	2,25
24	1,67	1,26	1,52	1,36
6	2,76	1,26	1,46	1,32
9	2,78	2,7	2.49	1,66
12	2,41	3,22	1,9	2,00

15.4 Получены следующие данные о плодовитости самок мышей при облучении их рентгеновскими лучами. Влияет ли облучение на плодовитость мышей?

Группы	**Число мышат от отдельных самок**			
Доза 0 р	10	12	11	10
Доза 100 р	8	10	7	9
Доза 200р	7	9	6	4

15.5 Изучали процент гемоглобина в крови кур разных пород. Влияет ли породность на процент гемоглобина?

Породы	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Итальянские	87	92	86	91	90	93	90
Куропатчатые	91	90	88	89	90	87	89
Минорки	85	82	85	86	89	84	85
Бентамы	82	82	85	83	82	83	84

15.6 Изучали живой вес ягнят при рождении (в кг), ношенных разное число дней:

Длительность Беременности	**Живой вес ягнят**									
145	3,8	2,9	3,3	3,6	3,8	3,7	4,8	5,1	3,4	3,3
146	3,7	2,9	3,3	3,6	3,9	3,7	4,7	5,0	3,4	3,2
147	3,9	4,1	4,4	5,0	3,0	2,9	4,0	3,2	4,2	4,3
148	4,0	5,2	4,3	2,9	4,1	3,9	3,2	3,9	4,1	4,0
149	4,0	5,3	4,2	3,0	4,0	3,9	4,2	3,3	4,0	4,1
150	4,1	4,3	5,4	3,1	4,0	4,0	4,3	3,9	4,0	4,1
151	4,3	4,2	5,5	4,2	4,1	4,1	4,4	3,5	4,1	3,6
152	4,3	3,6	4,4	5,5	4,0	4,1	4,5	4,1	4,2	4,3
153	4,4	4,7	3,9	4,6	5,7	4,3	4,8	4,9	4,7	4,7

Примените метод дисперсионного анализа для выяснения влияния длительности плодоношения на живой вес ягнят.

15.7 .Используя метод дисперсионного анализа, определить достоверность влияния дозы микроэлемента на величину поглощения кислорода крысами.

Доза (А)	**Ср. величина потребл. кислорода (в мл)**		
А1	176	179	169
А2	162	167	168
А3	157	154	153

15.8 Методом дисперсионного анализа определить влияние форм клинического течения ревматизма на содержание гепарина в крови больных с ревматическим пороком сердца.

А-фаза течения болезни	**Содержание гепарина.**					
А1-острая	1	3	3	1	2	2
А2-вялая	2	2	3	3	4	4
А3-неактивная	2	4	3	4	5	6

15.9 Определяли содержание фосфотазы в эпифизах костей конечностей, подвергавшихся и не подвергавшихся однократной вибрации. Методом дисперсионного анализа выяснить, влияет ли вибрация на изменение активности фосфотазы в костях конечности.

Уровни фактора	**Содержание фосфатазы.**						
Интактная конечность	43	30	63	47	39	33	45
Контактная конечность	72	35	83	70	44	51	59

15.10 Больных острым инфарктом миокарда в первый месяц лечения наряду с общепринятым лечением назначили ежедневный приём аспирина в разных дозировках. При этом оценивали снижение относительного риска смерти через 30 дней от начала лечения острого инфаркта миокарда. Влияет ли на эффективность лечения острого инфаркта миокарда назначение различных доз аспирина?

Суточная дозировка асприна, мг/сут	**№ испытания**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
75	5	9	14	17	18	16
160	21	24	26	31	33	22
325	22	33	24	26	29	31
500	14	17	27	21	22	25
1500	15	21	24	28	26	20

15.11 У испытуемых было изучено потребление кислорода (в МЕТ) при различной физической активности. Влияет ли уровень физической активности на потребление кислорода?

Ходьба(км/ч)	**№ испытания**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1.5	2.5	2.4	2.7	2.2	2.6
3	3.1	3.3	2.9	3.0	2.9
5	4.9	5.4	5.2	5.7	5.3
6.5	5.8	6	5.7	5.4	5.1

15.12 При обострениях хронической обструктивной болезни лёгких используют лекарственный препарат будесонид. В таблице представлены значения парциального напряжения углекислого газа крови в зависимости от длительности терапии. Влияет ли продолжительность лечения будесонидом па парциальное напряжение углекислого газа крови?

дни	**№ испытания**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
2	44.2	43.9	44.1	44	43.8
4	43.7	43.1	43.5	43.9	43
7	41.6	42	41.5	41.9	41.2
10	40.1	40.7	40.4	40.9	41

15.13 В исследовании изучали изменение вязкости цельной крови больных стенокардией II и III функционального класса под влиянием ЭЛМ излучения КВЧ-диапазона на частоте молекулярного спектра излучения и поглощения атмосферного кислорода с различной продолжительностью периода облучения образца крови. Влияет ли продолжительность облучения на вязкость крови?

Продолжительность облучения крови (мин)	**№ испытания**					
	1	**2**	**3**	**4**	**4**	**5**
0-15	5.4	5	4.5	5.1	4.7	4.9
15-30	4.6	4.4	4.0	4.3	4.2	4.6
30-60	3.5	3.7	4	3.4	3	3.3
60-80	3	3.1	3.2	3.4	3.3	3.1

15.14 больных острым инфарктом миокарда в различные дни от начала заболевания определяли количество эритроцитов. В таблице представлены значения эритроцитов в различные сроки от начала острого инфаркта миокарда. Влияет ли продолжительность заболевания на содержание эритроцитов в крови.

Продолжительность заболевания, дни	**№ испытания**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	4.2	4.1	4.8	4.5	4	4.5
7	5.2	5.3	5.0	4.9	5.1	4.8
21	4.2	4.4	4.7	4.9	4.6	4.1

15.15 Оцените эффективность влияния небиволола на максимальную скорость кровотока в плечевой артерии(в м/с) через 6 мес. лечения у пациентов с сердечной недостаточностью.

Доза небивал.	**№ испытания**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1.25	0.34	0.32	0.33	0.35	0.34	0.32
2.5	0.54	0.53	0.55	0.56	0.54	0.53
5	0.61	0.63	0.64	0.62	0.63	0.66

15.16 В таблице отображены показатели фракции выброса левого желудочка у больных с хронической недостаточностью кровообращения различных функциональных классов. Определите, влияет ли функциональный класс недостаточности кровообращения на сократительною способность левого желудочка.

Фактор А	**№ испытаний**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0.47	0.45	0.41	0.4	0.43
2	0.48	0.43	0.41	0.42	0.41
3	0.33	0.32	0.34	0.3	0.35
4	0.23	0.21	0.2	0.24	0.25

15.17 В таблице отображены показатели индекса массы миокарда левого желудочка(г/м^2) у больных с хронической недостаточностью кровообращения различных функциональных классов. Определите, влияет ли функциональный класс недостаточности кровообращения на массу левого желудочка?

Функциональный класс	**№ испытания**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	140	141	142	145	141
2	138	139	142	140	143
3	190	187	192	189	191
4	250	252	255	254	247

15.18 Проверьте эффективность влияния оликарда на количество приступов стенокардии в сутки после курсового лечения пациентов с ранней постинфарктной стенокардией.

Доза оликарда (мг/сут)	**№ испытания**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
40	2	1	3	5	2	1
60	3	4	2	1	5	5
80	1	1	2	1	3	1

15.19 Проверьте, влияет ли степень тяжести (Х) хронической обструктивной болезни лёгких на объём форсированного выхода за 1 сек. (в % от должного).

Х	**№ испытания**					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Лёгкая	70	75	74	80	72	76
Средняя	61	56	62	60	53	52
Тяжёлая	45	49	50	45	47	42

15.20 Проверьте, влияет ли возраст на частоту распространённости изолированной систолической артериальной гипертензии в различных регионах России (в %).

Возраст	**Регионы**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
50	24	23	21	25	23
60	47	45	43	42	46
70	66	60	65	65	65
80	73	70	72	71	73

15.21 При уровне значимости α = 0,05 методом дисперсионного анализа проверить значимость влияния двух факторов: pH среды (фактор *A)* и концентрации (в процентах) лиганда (фактор *B)* на экстракцию комплекса металла с лигандом из водной в органическую фазу.

Уровни А	Уровни В		
	$B_1 = 1$	$B_2 = 2$	$B_3 = 3$
3	63	42	71
6	69	73	82
9	91	68	60

15.22 При уровне значимости α = 0,05 методом дисперсионного анализа проверить значимость влияния двух факторов: pH среды (фактор *A)* и концентрации (в процентах) лиганда (фактор *B)* на экстракцию комплекса металла с лигандом из водной в органическую фазу.

Уровни А	Уровни В		
	$B_1 = 1$	$B_2 = 2$	$B_3 = 3$
3	63	42	71
6	69	73	82
9	91	68	60

15.23 При уровне значимости $\alpha = 0,05$ методом дисперсионного анализа проверить существенность влияния температуры (фактор *A)* и фермента (фактор *B)* на выход продукта биохимического синтеза.

Уровни А	Уровни *B*	
	B_1	B_2
A_1	100	90
A_2	86	87

16. Ряды динамики.

Динамическим рядом называется совокупность однородных статистических величин, показывающих изменение какого-либо явления на протяжении определенного промежутка времени.

Изучение изменения явлений во времени является одной из важнейших задач статистики. Решается эта задача при помощи составления и анализа так называемых рядов динамики или временных рядов.

Как и ряды регрессии, эмпирические ряды динамики несут на себе влияние не только основных, но и многочисленных второстепенных (случайных) факторов, затушевывающих ту главную тенденцию в изменчивости признаков, которая на языке статистики называется **трендом**.

Тренд- основная тенденция изменения уровней.

Анализ рядов динамики начинается с выявления формы тренда. Ряды динамики тех или иных изучаемых показателей могут отражать различные процессы изменения. Уровни любого ряда являются результатом взаимодействия самых различных причин, одни из которых могут действовать длительно, другие кратковременно, одни являются главными, определяющими тенденцию изменения, а другие – случайными, затушевывающими ее.

Поэтому, чтобы сделать правильные выводы о закономерностях развития того или иного показателя, надо суметь отделить главную тенденцию изменения от колебаний, вызванных влиянием случайных кратковременных причин.

Статистика дает возможность количественно охарактеризовать влияние, оказываемое этими двумя группами факторов, на изменения изучаемых явлений, т. е. определить, в какой мере эти изменения вызваны длительно действующими и в какой мере временно действующими факторами.

В целях выравнивания используются следующие методы:

- графический метод
- метод удлинения периодов
- метод скользящей средней
- метод наименьших квадратов

Графический метод.

Строят график зависимости данной исследуемой величины от времени. Строят ломаную линию. Затем с помощью линейки вычерчивают прямую или с помощью лекала – кривую. Эта линия позволяет увидеть общую тенденцию развития динамического ряда. Графический метод является субъективным.

Метод удлинения периодов.

В целях устранения резких отклонений в величинах динамических рядов в отдельные годы производится объединение или укрупнение периодов. Для объединённых периодов вычисляют средние хронологические величины, которые наносят на линейную диаграмму. Через них проводят линию, график которой даёт возможность по ординате получить теоретические ожидания величины-$y_т$.

Метод удлинения периодов является попыткой улучшить графический метод выравнивания динамических рядов. Здесь сохраняется графическое определение $y_т$, но при проведении линии, описывающей тенденцию развития используют более объективный критерий-средние хронологические величины. Этот метод, так же, как и графический является субъективным.

Метод скользящей средней.

При этом методе тенденция развития представлена последовательной серией сплетающихся средних. Эти средние представляют собой теоретически ожидаемые величины-$Y_т$ и вычисляются следующим образом.

Если приняты трехлетние периоды для осреднения, то первая средняя получается путем осреднения фактических чисел первого, второго и третьего годов. Полученная величина будет относиться ко второму году:

$$Y_{T_2} = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3} \qquad Y_{T_3} = \frac{Y_2 + Y_3 + Y_4}{3} \qquad \text{и т.д.}$$

При методе скользящей средней теряется часть сведений, так же как и при методе удлинения периодов. При трехлетнем укрупнении теряются сведения за 2 года –первый и последний.

Метод наименьших квадратов.

Более совершенным способом обработки динамических рядов с целью установления тенденции развития является выравнивание по налитическим формулам. При этом способе на основе фактических данных ряда подбирается наиболее подходящая для отражения тенденции развития явления математическая формула (аппроксимирующая функция), по которой рассчитывают выровненные значения.

Этот метод преследует ту же цель, что и описанные выше методы- устранение влияния временно действующих причин и выявить тенденцию развития, вызванную только действием длительно действующих факторов. Тенденцию развития лучше всего можно выразить линией, наиболее близкой к фактическим данным, это достигается методом наименьших квадратов.

Суть метода в том, что:$\Sigma(y-y_i)^2=\min$

Для получения параметров **a** и **b** составляют систему уравнений:

$$\Sigma y_i = a\Sigma t + bn$$

$$\Sigma y_i t = a\Sigma t^2 + b\Sigma t$$

Эту систему легко упростить, если временные точки- t условно обозначить так, чтобы их сумма была равна нулю. Для этого отсчёт временных точек ведётся от середины ряда. Средняя точка берётся за нуль. Предшествующие периоду обозначаются –1. –2. –3.,а последующие за средним периодом соответственно через +1. +2. +3 и т. д. Следовательно, $\Sigma t=0$. Тогда эта система уравнений примет вид: $\Sigma y_i=bn$ $\Sigma y_i t=a\Sigma t^2$

$$b=\frac{\sum y_i}{n} \qquad a=\frac{\sum y_i \cdot t}{\sum t^2}$$

Затем находят уравнение линейной регрессии: Y=at+b

Задача: Даны значения детской рождаемости по годам.

Год	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Y	41	35	32	32	31	29	27	26	26

Выявить тенденцию развития данного ряда, используя:

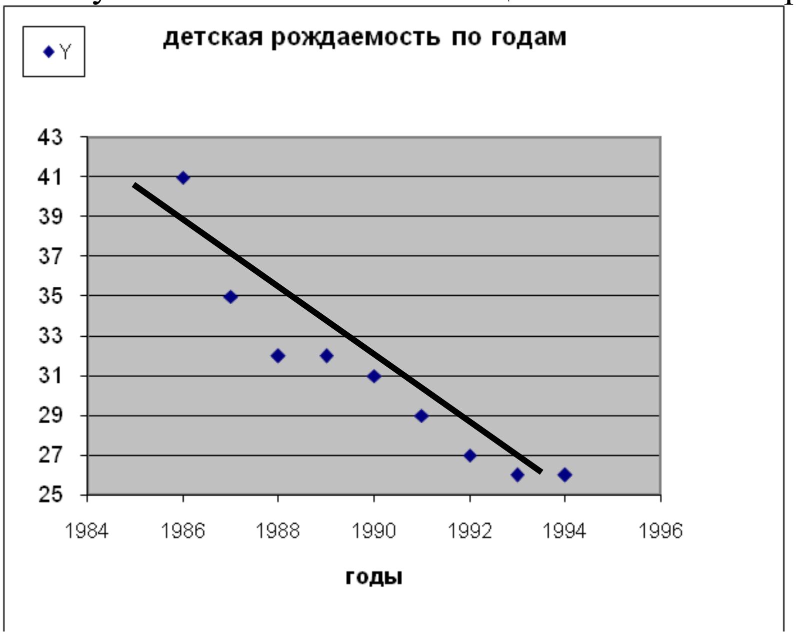
1. Графический метод
2. Метод удлинения периодов
3. Метод скользящей средней
4. Метод наименьших квадратов

Сделать вывод о тенденции развития динамического ряда. Дать заключение о наиболее эффективном методе выравнивания данного динамического ряда.

Решение:

1. Графический метод.

Строят график зависимости данной исследуемой величины от времени. Строят ломаную линию. Затем с помощью линейки вычерчивают прямую.

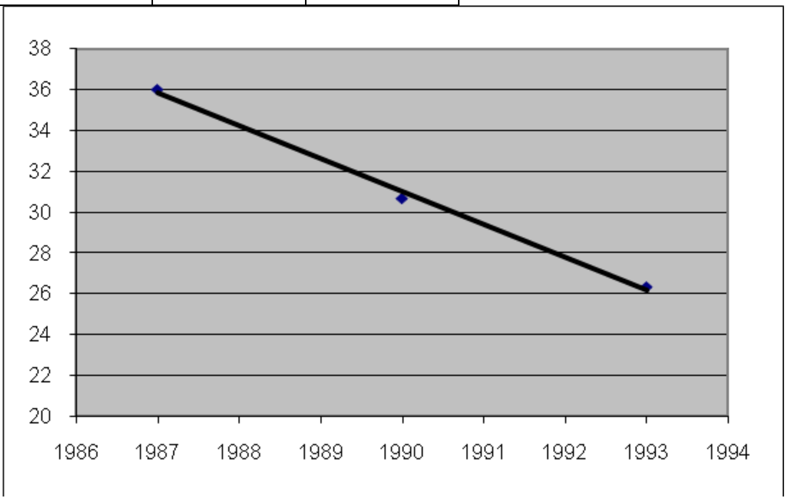


Метод удлинения периодов.

Объединяют данные задачи по три года и для объединённых периодов вычисляют средние хронологические величины (**Y′**), которые наносят на линейную диаграмму. Через них проводят линию, график которой даёт возможность теоретические ожидаемые величины-$y_т$.

Год	**Y**	**Y′**
1986	**41**	

1987	**35**	**36**
1988	**32**	
1989	*32*	
1990	*31*	*31*
1991	*29*	
1992	27	
1993	26	26
1994	26	



Этот метод, так же, как и графический является субъективным.

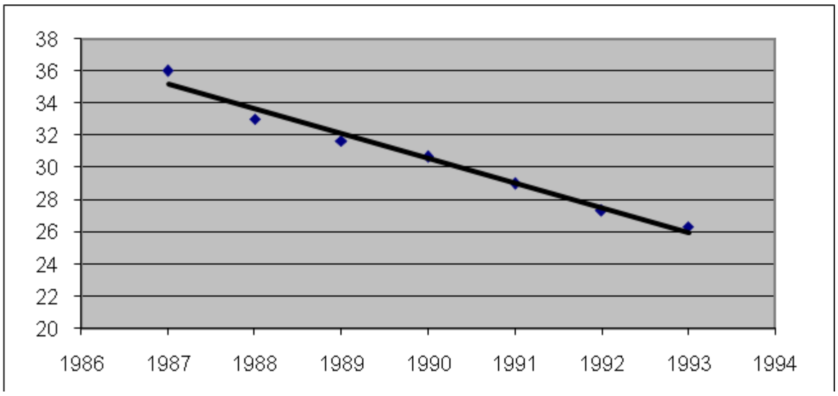
Метод скользящей средней.

При этом методе тенденция развития представлена последовательной серией сплетающихся средних. Эти средние представляют собой теоретически ожидаемые величины-$Y_т$ и вычисляются следующим образом. Если приняты трехлетние периоды для осреднения, то первая средняя получается путем осреднения фактических чисел первого, второго и третьего годов. Полученная величина будет относиться ко второму году:

$Y_{T_2} = \frac{Y_1 + Y_2 + Y_3}{3}$ $\qquad$ $Y_{T_3} = \frac{Y_2 + Y_3 + Y_4}{3}$ $\qquad$ и т.д.

од	**Y**	**Y''**
1986	41	-
1987	35	36
1988	32	33
1989	32	32
1990	31	31
1991	29	29
1992	27	27
1993	26	26
1994	26	-

Данные наносят на график и проводят линию.



Метод наименьших квадратов.

Выравнивание ряда показателей детской рождаемости.

Год	Y	T_i	$Y_i\ t_i$	t_i^2	Y^1
1986	41	-4	-164	16	37.8
1987	35	-3	-105	9	36.1
1988	32	-2	-64	4	34.4
1989	32	-1	-32	1	32.7
1990	31	0	0	0	31.0
1991	29	1	29	1	29.3
1992	27	2	54	4	27.6
1993	26	3	78	9	25.9
1994	26	4	104	16	24.2
N=9	$\boldsymbol{\Sigma y_i=279}$	$\boldsymbol{\Sigma t_i=0}$	$\boldsymbol{\Sigma y_i\ t_i=-100}$	$\boldsymbol{\Sigma\ t_i^2=60}$	

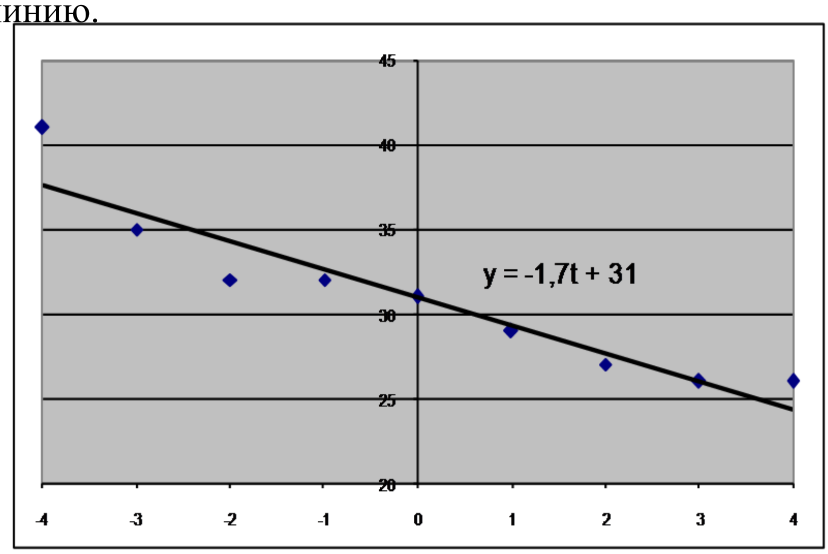
План решения методом наименьших квадратов:

1. Отсчёт времени берут от середины динамического ряда и находят общую сумму **(Σt_i)**, она равна нулю.
2. Находят произведение показателей детской рождаемости на соответствующее значение времени (**$y_i\ t_i$**), далее суммируют полученные результаты (**$\Sigma y_i\ t_i$**).
3. По формулам находят коэффициенты : $b = \dfrac{\sum y_i}{n}$ $\quad\quad$ $a = \dfrac{\sum y_i \cdot t}{\sum t^2}$

в=279:9=31 $\quad$ а=(-100):60=-1.7

4. Получают уравнение регрессии: **Y=-1.7t+31**
5. строят график:

Берут значение X_1=-4 $\quad Y_1$=37.8 и X_2=0 $\quad Y_2$=31, по этим точкам строят линию.



Вывод: Данный метод является наиболее точным, так как уравнение линии найдено методом наименьших квадратов, т. е. теоретически рассчитано.

Задачи для самостоятельного решения:

11.1 Дан динамический ряд количества заболеваний: дифтерией, коклюшем, полиомиелитом и туберкулёзом в Шри – Ланке в 1966 – 1980 гг.

Рассчитать показатели заболеваемости (на 100тыс. населения) по формуле:

$$\text{Показатель заболеваемости} = \frac{\text{×èñëî çàáîëåâàíèé}}{\text{×èñëåííîñòü íàñåëåíèÿ}} \cdot 100000$$

и по полученным данным:

1. Рассчитать показатели динамического ряда:

a) Абсолютный прирост ряда
b) Коэффициент роста ряда
c) Темп роста ряда
d) Темп прироста ряда

2. Выявить тенденцию развития данного ряда используя:

a. Графический метод
b. Метод удлинения периодов
c. Метод скользящей средней
d. Метод наименьших квадратов

3. Сделать вывод о тенденции развития динамического ряда. Дать заключение о наиболее эффективном методе выравнивания данного динамического ряда.

Годы	**Население (тыс.)**	**Число случаев**			
		дифтерия	**коклюш**	**полиомиелит**	**туберкулёз**
1966	11335	1436	2185	332	61,68
1967	11598	1453	1218	144	63,04
1968	11867	1148	1461	1009	64,04
1969	12142	972	2348	186	62,61
1970	12423	986	1651	121	57,62
1971	12711	715	1696	330	5650
1972	12910	755	1984	297	6441
1973	13113	496	968	366	5970
1974	13319	251	525	603	6074
1975	13527	310	1341	190	7324
1976	13739	152	1040	258	6823
1977	13955	147	1078	127	5994
1978	14174	216	703	153	6360

1979	14396	101	803	143	6152
1980	14622	37	542	264	6212

В задачах №11.2-11.13 на динамические ряды:

1. Рассчитать показатели динамического ряда:

1.Абсолютный прирост ряда
2.Коэффициент роста ряда
3.Темп роста ряда
4.Темп прироста ряда

2. Выявить тенденцию развития данного ряда используя:

1. Графический метод
2. Метод удлинения периодов
3. Метод скользящей средней
4. Метод наименьших квадратов

3. Сделать вывод о тенденции развития динамического ряда. Дать заключение о наиболее эффективном методе выравнивания данного динамического ряда.

16.1 Реализация витамина С по годам по аптекоуправлению (тыс. упаковок):

Год	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Y	25	30	18	23	14	20	11	12	7

16.2 Потребление сульфаниламидных препаратов, по данным аптеки, следующее (тыс. руб.)

Год	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Y	12	19	27	30	35	40	47	46	50

16.3 Оптовый товарооборот в аптеке по годам (тыс. руб.)

Год	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Y	32	34	36	41	44	50	50	53	56

16.4 Потребление (по одной аптеке) антибиотиков (тыс. руб.):

Год	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Y	26	30	36	48	32	44	52	46	56

16.5 Реализация аспирина по аптеке (тыс. руб.):

Год	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Y	34	32	36	31	20	16	10	12	10

16.6 Изменение числа работников, занятых в системе районного аптекоуправления (чел.)

ГОД	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Y	34	28	36	32	28	22	24	26	20

16.7 Уменьшение дефицита спазмалитиков по аптекоуправлению (тыс. Руб.)

ГОД	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Y	40	36	42	34	38	20	32	26	20

16.8 Заготовка лекарственного сырья по аптекоуправлению (тыс. Руб.)

ГОД	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Y	50	46	52	44	48	32	42	36	39

16.9 Изменение потребления желчегонных препаратов по аптеке (тыс. руб.)

ГОД	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Y	1,1	0,9	1,7	1,5	1,7	1,5	2,1	2,5	3,6

16.10 Артериальное давление у больных артериальной гипертензией через время t, после приёма лекарственного препарата.

Время (часы)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
АД мм.рт.ст.	172	161	159	155	152	160	163	166	173	173	168	170

16.11 Динамика содержания белка в моче (в г/сут.) у больной красной волчанкой в процессе лечения преднизолоном и циклофосфаном.

1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
10	15	4.5	1	5.5	4	1.5	1	3.5	6	2.2	1.5

16.12 Изменение суммарного балла по шкале тревоги Гамильтона в процессе 6-недельной терапии пароксетином у больных с паническими расстройствами.

Дни	1	7	14	21	28	35	42	56	70
Суммарный бал	26	24	19	15	13	10	9	8	9

17. Оценки погрешностей измерений.

1. Виды измерений. Прямые измерения

Измерение – это нахождение значения физической величины опытным путем с помощью технических средств.

Физическая величина – это количественное значение параметров, оцениваемых физико-химических процессов, происходящих в любых реальных объектах. Это понятие может быть обобщенным, например, масса, длина, скорость и т.п., и может быть конкретным: частота пульса, скорость кровотока, длина руки и т.д.

Технические средства, или просто средства измерения - это в общем измерительные приборы, в которых измеренная информация представляется в форме доступной для восприятия (например, в виде цифр).

По способу получения результатов можно выделить измерения **прямые** и **косвенные.**

Прямые измерения заключаются в том, что искомое значение величины находят из опытных данных путем экспериментального сравнения. Например, температуру тела измеряют термометром, длину – линейкой.

Уравнение прямого измерения: $y = cx$,

где c – цена деления, x – число делений.

Косвенные измерения заключаются в том, что искомое значение величины находят на основе известной зависимости (формулы) между этой величиной и величинами, найденными прямыми измерениями. Например, объем шара $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, сопротивление $R = \frac{U}{I}$.

Уравнение косвенного измерения: $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_i – результат прямого измерения.

Истинная погрешность измеряемой величины

Погрешность измерения $\Delta x_{изм}$ – это отклонение результата измерения *x* от истинного (действительного) $x_и$ значения измеряемой величины.

$$\Delta x_{изм} = x - x_и.$$

На точность измерения влияет большое количество факторов, поэтому оценка погрешности очень важна для обеспечения единства измерений. Для практических целей достаточно рассмотреть систематические и случайные составляющие общей погрешности, выраженные в абсолютных и относительных единицах при прямых и косвенных измерениях.

- **Абсолютная погрешность измеряемой величины**

Абсолютная погрешность измерения Δ - это разность между результатом измерения *x* и фактическим значением $x_и$ измеряемой величины:

$$\Delta = x - x_и.$$

Она выражается в тех же единицах, что и сама измеряемая величина.

- **Относительная погрешность измеряемой величины**

Относительная погрешность измерения **δ** – это относительная абсолютная погрешность к самой измеряемой величине *x* или к ее истинному значению $x_и$.

Выражается в процентах: $\boldsymbol{\delta} = \pm \frac{\Delta}{x_и} \cdot 100\%$.

- **Средняя квадратическая погрешность**

Для оценки рассеяния отдельных результатов $\bar{x}$ определяют абсолютную среднюю квадратическую погрешность (ошибку). В литературе этот термин имеет ряд синонимов. Это или «исправленное среднее квадратическое отклонение», или «стандартное отклонение», или «средняя квадратическая ошибка», или «стандарт измерения».

Средней квадратической погрешностью, или ***стандартным отклонением***, называется величина:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Квадрат этой величины называется ***дисперсией***.

- Относительная величина средней квадратической погрешности, выраженная в процентах, называется ***коэффициентом вариации (CV).***

$CV = \frac{S}{x} \cdot 100\,\%$.

Систематические погрешности

В зависимости от характера проявления, причин возникновения и возможностей устранения различают систематическую и случайную составляющую погрешности измерений, а также грубые погрешности (промахи).

Систематическая погрешность Δ_c- это погрешность, которая остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одного и того же параметра. Она может возникать, в частности, если при измерениях не учитывается влияние некоторых факторов.

Например, может быть погрешность при отсчете давления по ртутному барометру, если не учитывается температура окружающей среды.

Систематические погрешности могут быть обусловлены неисправностью измерительных приборов, например, смещением нуля школы.

Грубые погрешности и промахи.

Грубые погрешности возникают из-за ошибочных действий оператора, неисправности средств измерения или разных условий измерений. Как правило, грубые погрешности выявляются в результате обработки результатов измерений с помощью специальных критериев.

Критерии для оценки промахов.

1. **Критерий 3σ** используют, если число измерений n≥20.
   Взяв сомнительный результат, x_i рассматривают по модулю $|x_i - \bar{x}|$ между предполагаемым промахом и средним значением, если эта разность $|x_i - \bar{x}\rangle 3\sigma$, то он мало вероятен и его можно отбросить.
2. **Критерий Романовского**. Его используют, если n<20.
   Вычисляют модуль отношения $\left|\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right| = \beta$,
   где x_i - предполагаемый промах, а $\bar{x}$ - среднее без значения этого промаха.
   Полученное значение β сравнивают с теоретическим β_T при выбираемом уровне значимости α по таблице 1.

Уровень значимости α	Число измерений						
	n=4	n=6	n=8	n=10	n=12	n=15	n=20

0,01	1,73	2,16	2,44	2,62	2,75	2,90	3,08
0,02	1,72	2,13	2,37	2.54	2,66	2,80	2,96
0,05	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,1	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,62

Обычно выбирают $\alpha \le 0{,}01 \div 0{,}05$, и если расчетное $\beta \ge \beta_T$, результат отбрасывают.

Пример 1.

Измерение напряжения: **22; 24; 26; 28; 48 В**. Последний результат ставим под сомнение. Найдем β.

$$\bar{x} = \frac{22+24+26+28}{4} = 25(B)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3^2+1^2+(-1)^2+(-3)^2}{4-1}} = 2{,}6(B)$$

$$\beta = \left|\frac{48-25}{2{,}6}\right| = 8{,}8.$$

При n=4, при $\alpha \le 0{,}05$, $\beta_T = 1{,}71$, $\beta > \beta_T$, 8,8>1,71.

Следовательно, последний результат 48В должен быть отброшен.

Пример2.

Измерение силы тока дало следующие результаты:**10,07;10,08;10,10;10,12;10,13;10,15;10,16;10,17;10,20;10,40 А.** Последний результат вызывает сомнение, хотя и отличается незначительно. Не промах ли это? Находим среднее:

$\bar{x}$ =10,16(А) и σ=0,094 (В)

$$\beta = \left|\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right| = \frac{10{,}40 - 10{,}16}{0{,}094} = 2{,}67.$$

При n=10 и $\alpha \le 0{,}05, \beta_T = 2{,}41, \beta \ge \beta_T, 2{,}67 > 2.41.$

Следовательно, результат 10,40А является промахом.

Случайные погрешности.

Случайная погрешность Δ- это погрешность, значение которой случайным образом меняются при повторных измерениях.

Значение случайной погрешности заранее неизвестно. Случайные ошибки возникают из-за влияния различных неконтролируемых причин. Например, при измерении времени секундомером можно один раз нажать на кнопку чуть раньше, а другой- чуть позже, чем надо. Или, наливая жидкость в кювету, можно уровень установить чуть выше или чуть ниже нужного деления и т.п. Случайные погрешности могут возникать из-за колебаний температуры в помещении и т.п.

Случайные погрешности нельзя исключить полностью, но их влияние может быть уменьшено путем обработки результатов измерений.

Определение случайных погрешностей при помощи доверительного интервала при прямых измерениях.

Пусть проведено n измерений величины x и получено n значений:
$x_1; x_2; \ldots; x_i$.

1. Вычислить среднею арифметическую: $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$

2. Вычислить абсолютную погрешность результатов отдельных наблюдений.

$|\Delta x_i| = |x_i - \bar{x}|$, где i=1,2,…,n.

$|\Delta x_1| = |x_1 - \bar{x}|$,

$|\Delta x_2| = |x_{2i} - \bar{x}|$,

…,

$|\Delta x_n| = |x_n - \bar{x}|$.

3.Вычислить среднюю квадратическую погрешность (стандарт) по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

4. Исключить ошибки промаха, которые могут сильно исказить результат.
5. Рассчитать границы доверительного интервала $(\bar{x} - \Delta x; \bar{x} + \Delta x)$, где Δx - это случайная погрешность. Случайная погрешность $\Delta \tilde{\delta} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} t$, где $t_{n,\alpha}$ - коэффициент Стьюдента, находится из таблицы.

$\alpha = 1 - p$ - это уровень ошибки (значимости).

6. Записать окончательный результат.

$x = \bar{x} \pm \Delta x \qquad (p \geq 0.95)$.

Этот доверительный интервал должен быть значительно меньше систематической погрешности.

7. Определить систематическую погрешность прибора Δ_C
8. Сравнить систематическую погрешность Δ_C со случайной погрешностью Δx.
   - Если окажется, что одна из них в 3 раза и более больше другой, то границы доверительного интервала устанавливаются по большей погрешности:

     $$x = \bar{x} \pm \Delta x \text{ или } x = \bar{x} \pm \Delta_C$$

   - Если эти погрешности примерно равны, то надо рассчитать суммарную погрешность δ по формуле:

     $$\delta = \Delta_C + 2\Delta x.$$

     Тогда доверительный интервал примет вид $x = \bar{x} \pm \delta$
9. Записать окончательный результат.

<u>Пример 3</u>.

С помощью секундомера было проведено 5 измерений одинаковых промежутков времени: 89,6; 89,2; 89,4; 89,0; 89,5.

1. Среднее значение:

$$\bar{x} = \frac{89{,}6 + 89{,}2 + 89{,}4 + 89{,}0 + 89{,}5}{5} = 89{,}34 \approx 89{,}3(c).$$

2. Абсолютная погрешность отдельных измерений $x_i - \bar{x}$.

   0,3; 0,1; 0,1; 0,3; 0,2.

3. $\sigma = \sqrt{\dfrac{0.3^2 + 0.1^2 + 0.1^2 + 0.1^2 + 0.3^2 + 0.2^2}{4}} = 0.3(c).$

4. Максимальная погрешность в 1-м и 4-м случаях. Проверим их на промах, используя любой критерий, и видим, что промаха нет.

5. Граница доверительно интервала:

   $\Delta\tilde{o} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\alpha \le 0{,}05, n,}$

   $t_{\alpha \le 0.05;5} = 2{,}8$ (из таблицы Стьюдента),

   $\Delta x = \dfrac{0.3}{\sqrt{5}} \cdot 2.8 = 2{,}28 \approx 0{,}3(c)$.

6. Запишем окончательный результат:

   $x = \bar{x} \pm \Delta x = 89{,}3 \pm 0{,}3(p \ge 0{,}95)$.

7. Систематическая ошибка секундомера равна половине цене деления прибора (наименьшее деление секундомера 0,2с):

   $\Delta_C = \dfrac{0{,}2}{2} = 0{,}1(c).$

8. Сравним случайную Δx и систематическую Δ_C ошибки: 0,3 и 0,1.

   Случайная больше в 3 раза и систематической ошибкой можно пренебречь.

9. Окончательно $x = 89{,}3 \pm 0{,}3 \qquad (\eth \ge 0{,}95)$.

Оценка погрешностей косвенных измерений

На практике очень часто интересующая нас величина вычисляется по некоторой формуле, а не измеряется непосредственно. То есть косвенные измерения предполагают наличие функциональной связи.

$y = f(x_i)$, где x_i - прямое измерение.

Погрешность Δy в оценке Y зависит от погрешностей при измерениях аргумента x_i.

Правила оценки погрешностей косвенных измерений:

- Абсолютная погрешность суммы или разности равна корню квадратному из суммы абсолютных погрешностей слагаемых.

  Если $Y = x_1 + x_2$ то $\Delta Y = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$.

- Относительная погрешность произведения (дроби) равна корню квадратному из суммы квадратов относительных ошибок сомножителей (числителя и знаменателя).

  Если $Y = x_1 \cdot x_2$ или $Y = \dfrac{x_1}{x_2}$, то $\dfrac{\Delta Y}{Y}=\sqrt{\left(\dfrac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2+\left(\dfrac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2}$.

Запись результатов косвенных измерений

Все вычисления ошибок надо выполнять приближенно, лишь оценивая, в каких пределах эта ошибка может заключаться. Следует учесть, что все формулы теории ошибок выведены для нормального распределения при большом числе измерений. На практике чаще всего закон распределения может отличаться от нормального и число измерений небольшое.

Практически надо руководствоваться следующим правилом:

1. Все расчеты вести с точностью до двух знаков (часто достаточно и одного), широко пользуясь правилами округления.
2. Нет смысла указывать в результате те знаки, значение которых меньше чем ошибка измерений. Например, измеряя массу *m*, получили:

m=144,23±1 (г).

Это неправильная запись. Если ошибка 1 *г*, то зачем сотовые доли?

Правильно будет: *m=144±1 (г).*

Или, рассчитывая сопротивление *R*, получили: *R=24,4785±0,02 (Ом)*

Это неправильно. Правильно будет округлить результат до сотых (как в ошибке): *R=24,49±0,02 (Ом).*

<u>Пример 4</u>

Сопротивление резистора измеряется с помощью моста Уитстона:

$$R_x=\frac{R_1R_2}{R_3}$$

Найти неизвестное сопротивление и его абсолютную и относительную ошибку.

Дано:	*Решение:*
R_1=1057±1 Ом	$R_x=\dfrac{R_1R_2}{R_3}$
R_2=216,5±0,3 Ом	$R_x=\dfrac{1057\cdot 216,5}{58,1}=3940$ *Ом.*
R_3=58,1±0,1 Ом	Относительную ошибку находим по формуле:
R_x-? ΔR_x-? $\dfrac{\Delta R_x}{R_x}$	

$$\frac{\Delta R_x}{R_x}=\sqrt{\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)^2+\left(\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)^2+\left(\frac{\Delta R_3}{R_3}\right)^2}\qquad \frac{\Delta R_x}{R_x}=\sqrt{\left(\frac{1}{1057}\right)^2+\left(\frac{0,3}{216,5}\right)^2+\left(\frac{0,1}{58,1}\right)^2}\approx 0,25\%$$

Абсолютная ошибка равна: $\Delta R_x = R_x \cdot 0{,}25\%$

$\Delta R_x = 3940 \cdot 0{,}0025 = 10$ *Ом*

Ответ: $R_x \pm \Delta R_x = 3940 \pm 10$ *(Ом)*.

Задачи для самостоятельного решения на оценку погрешностей измерений.

17.1 В результате десяти измерений диаметра капилляра (мкм)в стенке лёгочных альвеол были получены следующие данные: 2,83; 2,82; 2,81; 2,85; 2,87; 2,86; 2,83; 2,85; 2,83; 3,44. Выбрать критерий для оценки промахов и исключить промахи. Определить абсолютную и относительную погрешность.

17.2 При определении микроаналитическим способом содержания азота в данной пробе были получены следующие результаты: 9,29; 9,38; 9,35; 9,43; 9,53; 9,48; 9,61; 9,98 (%).Выбрать критерий для оценки промахов и исключить промахи. Определить абсолютную и относительную погрешность.

17.3 При фотоэлектроколориметрическом определении концентрации ацетилсалициловой кислоты на основании реакции с сульфатом меди и пиридином были получены следующие результаты: 99,2%; 99,0%; 98,9%; 99,3%; 98,8%; 99,2%; 99,0%; 98,9%; 99,3%; 98,8%; 99,2%; 99,0%; 98,9%; 99,3%; 98,8%; 99,2%; 99,0%; 98,9%; 99,3%; 98,8%; 109,1 %. Выбрать критерий для оценки промахов и исключить промахи. Определить абсолютную и относительную погрешность.

17.4 При анализе лекарственного препарата (с целью контроля его качества) метазона – 1%-ного раствора для инъекций – найдены следующие значения pH этого раствора: 4,50; 4,52; 4,55; 4,60; 4,70; 5,25. Выбрать критерий для оценки промахов и исключить промахи. Определить абсолютную и относительную погрешность.

17.5 В десяти одинаковых пробах были получены следующие значения содержания марганца: 0,69; 0,70; 0,67; 0,66; 0,67; 0,68; 0,67; 0,69; 0,68; 0,87 (%). Выбрать критерий для оценки промахов и исключить промахи. Определить абсолютную и относительную погрешность.

17.6 При определении посторонних примесей в образце лекарственного препарата найдено суммарное содержание примесей : 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,8; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; (%)
Выбрать критерий для оценки промахов и исключить промахи. Определить абсолютную и относительную погрешность.

17.7 Средняя масса таблетки сульфадиметоксина при десятикратном измерении равна 0,528 г. Абсолютная погрешность при измерении массы таблетки при доверительной вероятности 0,95, $\Delta m = 0{,}002$ г. Средний объем таблетки $V = 0{,}2$ см^3. Определить, с какой абсолютной погрешностью ΔV нужно произвести измерение объема, чтобы абсолютная погрешность плотности сульфадиметоксина была равна 0,04 г/см^3.

17.8 Вязкость спирта **η** с помощью вискозиметра Оствальда можно вычислить по формуле: $\eta = \eta_0 \dfrac{\rho \cdot t}{\rho_0 \cdot t_0}$, где ($\eta_0$=1±*0,01* Па·с)– вязкость воды,

(ρ_0=1 ±*0.01*г/см^3)– плотность воды, (ρ=0,79 ±*0.01* г/см^3)– плотность спирта, (*t_0 =20±1 с*– время истечения воды, (*t=15±1 с)* – время истечения спирта. Найти значение вязкости спирта и его абсолютную и относительную ошибку.

17.9 Вязкость ртути **η** с помощью вискозиметра Оствальда можно вычислить по формуле: $\eta = \eta_0 \dfrac{\rho \cdot t}{\rho_0 \cdot t_0}$, где ($\eta_0$=1±*0,01м* Па·с)– вязкость воды,

(ρ_0=1 ±*0.01*г/см^3)– плотность воды, (ρ=13,6 ±*0,1* г/м^3)– плотность ртути, (*t_0 =36±3 с*– время истечения воды, (*t=4±1 с)* – время истечения ртути. Найти значение вязкости ртути и его абсолютную и относительную ошибку.

17.10 Коэффициент поверхностного натяжения спирта можно определить с помощью сталагмометра методом отрыва капель по формуле:

$\sigma_1 = \sigma_2 \dfrac{n_2 \cdot \rho_1}{n_1 \cdot \rho_2}$, где ($\sigma_2$=0,073±*0.002*н/м)- коэффициент поверхностного натяжения воды, (ρ_2=1 ±*0.01*г/см^3)– плотность воды, (ρ_1 =0,79 ±*0.01* г/см^3)– плотность спирта, (n_1=100±*3*)-число капель спирта, (n_2 =34±*1*) число капель воды. Найти коэффициент поверхностного натяжения спирта и его абсолютную и относительную ошибку.

17.11 Коэффициент поверхностного натяжения ртути можно определить с помощью сталагмометра методом отрыва капель по формуле:

$\sigma_1 = \sigma_2 \dfrac{n_2 \cdot \rho_1}{n_1 \cdot \rho_2}$, где ($\sigma_2$=0,073±*0.002*н/м)- коэффициент поверхностного натяжения воды, (ρ_2=1 ±*0.01*г/см^3)– плотность воды, (ρ_1 =13,6 ±*0.1* г/см^3)– плотность ртути, (n_1=100±*3*)-число капель ртути, (n_2 =34±*1*) число капель воды. Найти коэффициент поверхностного натяжения ртути и его абсолютную и относительную ошибку.

Статистическая обработка результатов частоты сердечных сокращений (ЧСС) у группы студентов

Оборудование: секундомер

Ход работы

1. Провести измерение частоты сердечных сокращений в минуту у всех студентов группы. Результат занести в таблицу № 2.

№ Испытания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Чсс, (x) уд/мин																
$\left\| x_i - \bar{x} \right\|$																

2. Провести обработку результатов измерений. Для этого:

►Рассчитать среднюю:

$$\bar{x} = \overline{ЧСС} = \frac{ЧСС_1 + ЧСС_2 + \ldots + ЧСС_n}{n},$$

где n-число студентов в группе.

►Рассчитать абсолютные погрешности отдельного измерения по модулю:

$$|\Delta x_i| = |x_i - \bar{x}|\ .$$

Результат занести в таблицу №2

►Вычислить среднюю квадратичную и погрешность до одной значащей цифры:

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots..(x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$$

►Исключить ошибку промаха, используя какой-либо критерий.

►Рассчитать случайную погрешность:

$$\Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t\ .$$

Для этого найти в таблице Стьюдента $t_p \geq 0{,}95$ ($\alpha \leq 0{,}05$), n

►Записать окончательный результат. Доверительный интервал для частоты сердечных сокращений:

$$ЧСС = \bar{x} \pm \Delta x \quad (p \geq 0{,}095).$$

3.Сделать вывод

V. Глоссарий

1. **Теория вероятностей** - раздел математики, в котором изучаются только случайные явления (события) и выявляются закономерности при массовом их повторении.
2. **Случайное событие** - это факт, который в условиях данного опыта может либо произойти, либо нет (выпадение орла при бросании монеты, пол ребёнка при рождении).
3. **Достоверное событие** - событие, которое в условиях данного опыта обязательно произойдет.
4. **Невозможное событие** - которое никогда не произойдет в условиях данного опыта.
5. **Совместимые события** - события А и В называют совместимыми, если в результате данного опыта появление одного из них не исключает появление другого.
6. **Несовместимые события** - если появление одного из них в единичном испытании исключает появление другого при том же испытании.
7. **Равновозможные события** - если возможность появления одного из них в единичном испытании не больше, чем возможность появления другого.
8. **Противоположные события -А и В** называют противоположными, если не появление одного из них, влечет появление другого в условиях данного опыта.
9. **Единственно возможные-**если при рассмотрении группы событий может произойти только одно из них в условиях данного опыта.
10. **Независимые события-**если появление одного из них не зависит от того, появилось ли другое в условиях данного опыта.
11. **Зависимые события-** если появление одного из них зависит от того, появилось ли другое в условиях данного опыта.
12. **Полная группа событий-**группу событий называют полной, если в условиях данного опыта произойдет одно (и только одно) из этих событий.
13. События А,В,С, ... N образуют полную группу, если они являются единственно возможными и несовместимыми исходами некоторого опыта.
14. **Вероятность события-**это число, которое характеризует степень возможности наступления этого события
15. **Классической вероятностью события А** называется отношение числа благоприятных исходов к общему числу несовместимых, единственновозможных и равновозможных исходов**.) Статистическая вероятность** равна пределу отношения числа благоприятных исходов к общему числу опытов при неограниченном увеличении их числа.
16. **Суммой двух событий А и В**-называется событие **С**, состоящее в появлении или события **А,** или события **В,** если события несовместны.
17. **Произведением двух событий А** и **В** называют событие **С,** которое состоит в одновременном появлении и события **А** и события **В.**

18. **Вероятность наступления одного из двух событий равна сумме вероятностей этих событий,** если эти события несовместны.
19. **Вероятность наступления одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их одновременного наступления.**
20. Сумма вероятностей попарно несовместных событий **A,B,C ... N**, образующих полную группу событий равна 1.
21. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.
22. Вероятность одновременного наступления двух событий А и В равна произведению вероятностей этих событий.
23. **Случайная величина-**такая переменная величина, которая принимает значения, зависящие от случая и при этом можно определить вероятности этих значений.
24. **Дискретная случайная величина-**это такая величина, множество значений которой выражаются целыми числами. (число новорожденных, число больных, число студентов ит.д.)
25. **Непрерывная случайная величина-**это такая случайная величина, множество значений которой лежат в определенном интервале. (рост, вес, температура, показания тонометра)
26. **Законом распределения дискретной случайной величины** называется совокупность значений случайной величины с соответствующими им вероятностями.
27. Биномиальное распределение позволяет рассчитать вероятность того что среди **n** испытаний событие **A** произойдет **m** раз.
28. Закон Пуассона позволяет рассчитать вероятность того, что при **n** испытаниях нужное нам событие выпадает **m** раз.
29. **λ=n p** -ожидаемое среднее значение;
30. **m!-**факториал или произведение натуральных чисел 1·2·3·4...m.
31. **Математическое ожидание-**сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.
32. **Дисперсия-**это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания.
33. **Среднее квадратическое отклонение-**корень квадратный из дисперсии.
34. **Функция плотности вероятности -** -это вероятность того, что непрерывная случайная величина X принимает значения между **(x и x+dx).**
35. **Математическая статистика**-раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и использования статистических данных для научных и практических выводов.
36. Множество относительно однородных, но индивидуально различимых единиц, объединенных для совместного (группового) изучения, называют статистической совокупностью.
37. **Генеральная совокупность-**это совокупность объектов, отличающихся друг от друга, но имеющих сходство в каких либо определенных чертах.

38. Отобранная тем или иным способом часть генеральной совокупности получила название **выборки.**
39. Чтобы выборка наиболее полно отображала структуру генеральной совокупности, она должна быть достаточно представительной, или **репрезентативной** (от лат. represento-представляю).
40. Репрезентативность выборки достигается способом **рандомизации** (от англ. randon-случай) или случайным отбором вариант из генеральной совокупности, что обеспечивает равную возможность для всех членов генеральной совокупности попасть в состав выборки.
41. **Стратофицированная выборка-**это выборка, при которой вся генеральная совокупность разбивается на группы, а затем в каждой группе делается случайный отбор.
42. **Вариационным-**называют ряд, все значения которого располагают в порядке возрастания или убывания.
43. **Средняя арифметическая-**это сумма всех членов совокупности**,** деленная на их общее число.
44. **Медиана-** средняя, относительно которой ряд распределения делится на две равные части: в обе стороны от медианы располагается одинаковое число вариант.
45. **Мода** -вершина распределения. Модой называется величина наиболее часто встречающаяся в данной совокупности.
46. **Дисперсия-**характеризует степень рассеяния случайной величины вокруг её математического ожидания.
47. **Среднее квадратическое отклонение (σ_x) -** характеризует степень рассеяния случайной величины вокруг её математического ожидания.
48. **Коэффициент вариации(Cv) -**численно равен средне-квадратическому отклонению, выраженному в процентах от величины средней арифметической.
49. **Нормированное отклонение-**это отклонение той или иной варианты от средней арифметической, отнесённое к величине среднего квадратического отклонения.
50. Коэффициент асимметрии -мера скошенности рядов,
51. Э**ксцесс-**характеризует остро- или плосковершинность вариационного ряда.
52. **Функциональные зависимости** - каждому значению одной переменной величины соответствует одно вполне определенное значение другой переменной (высота столба ртути соответствует определённой температуре);
53. **Корреляционные зависимости** - (статистические) - численному значению одной переменной соответствует много значений другой переменной (одному росту соответствует множество значений веса).
54. **Коэффициент корреляции-это число показывающее степень зависимости одной переменной величины от другой.**

55. **Регрессия** позволяет установить, как количественно меняется одна величина при изменении другой на единицу.
56. **Динамический ряд** – это совокупность однородных статистических величин, показывающих изменения какого-либо явления на протяжении определенного промежутка времени.
57. **Абсолютный прирост-** разница между значением данного года и предыдущим.
58. **Коэффициент роста –** отношение данного уровня к базисному. В качестве базисного уровня принимается уровень первого года.
59. **Темп роста-** коэффициент роста, выраженный в процентах.
60. **Темп прироста-** величина, показывающая на сколько процентов данный уровень больше или меньше базисного.
61. **Тренд –**основная тенденция изменения уровней.

62. **Измерение –** это нахождение значения физической величины опытным путем с помощью технических средств.
63. **Физическая величина** – это количественное значение параметров, оцениваемых физико-химических процессов, происходящих в любых реальных объектах.
64. **Технические средства**, или просто средства измерения - это в общем измерительные приборы, в которых измеренная информация представляется в форме доступной для восприятия (например, в виде цифр).
65. **Прямые измерения** заключаются в том, что искомое значение величины находят из опытных данных путем экспериментального сравнения.
66. **Косвенные измерения** заключаются в том, что искомое значение величины находят на основе известной зависимости (формулы) между этой величиной и величинами, найденными прямыми измерениями.
67. **Погрешность измерения** $\Delta \mathbf{x}_{\text{изм}}$ – это отклонение результата измерения x от истинного (действительного) $x_и$ значения измеряемой величины.
68. Абсолютная погрешность измерения Δ - это разность между результатом измерения x и фактическим значением $x_и$ измеряемой величины:

69. Относительная погрешность измерения **δ** – это относительная абсолютная погрешность к самой измеряемой величине x или к ее истинному значению $x_и$.
70. **Средней квадратической погрешностью**, или **стандартным отклонением,** называется величина $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$
71. **Систематическая погрешность** $\Delta_{\mathbf{c}}$- это погрешность, которая остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одного и того же параметра.

72. **Случайная погрешность Δ-** это погрешность, значение которой случайным образом меняются при повторных измерениях.

73. **Доверительная вероятность** – это вероятность того, что фактическое отклонение полученного нами результата от значения измеряемой величины не превышает вычисленного значения ошибки $\Delta\bar{x}$.

VI. ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ.

1. Функциональная зависимость. Свойства функции.
2. Предел функции. Теоремы о пределах. Замечательные пределы.
3. Дифференциальное исчисление. Понятие производной функции. Правило нахождения производной функции. Таблица производных. Физический и биологический смысл производной функции.
4. Дифференциал функции и его применение в приближённых вычислениях.
5. Применение производной первого порядка к исследованию функций на экстремум.
6. Функции двух или нескольких аргументов. Частные производные. Полный дифференциал функции нескольких переменных.
7. Интегральное исчисление. Первообразная функция. Геометрический смысл неопределённого интеграла. Таблица неопределенных интегралов. Простейшие методы интегрирования.
8. Определенный интеграл. Геометрический смысл определенного интеграла. Физический, биологический, химический смысл определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
9. Понятие о дифференциальных уравнениях. Использование дифференциальных уравнений для описания динамики биологических процессов. Решение дифференциального уравнения (общее, частное). Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
10. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка, их решение.
11. Составление и решение дифференциальных уравнений в задачах физики, химии и биологии.
12. Предмет теории вероятности. Основные понятия и определения теории вероятности.
13. Вероятность события. Классическая и статистическая вероятность.
14. Алгебра событий: а)сумма двух событий;
    б)произведение двух событий;

13. Основные формулы теории вероятности:
    а) формула сложения вероятностей;
    б) формула произведения вероятностей.

14. Полная вероятность. Формула Байеса.
15. Случайные величины. Дискретные случайные величины. Законы распределения дискретных случайных величин:
    а)биноминальное распределение;

б)распределение Пуассона.

16. Непрерывные случайные величины. Определение функции распределения непрерывной случайной величины. Закон распределения непрерывной случайной величины. Нормальный закон распределения. График нормального закона. Правило трёх сигм.
17. Числовые хар-ки распределения дискретной случайной величины. (математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение).Числовые хар-ки распределения непрерывной случайной величины.
18. Математическая статистика и ее метод. Основные этапы статистической работы. Генеральная совокупность и выборка. Способы формирования выборки.
19. Вариационный ряд и его наглядное изображение. Построение гистограммы.
20. Характеристики статистического распределения:
    а)характеристики положения, расчет моды и медианы;
    б)характеристики формы, расчет коэффициента ассиметрии и эксцесса;
    в) характеристики рассеяния.
21. Оценка параметров генеральной совокупности. Точечная и интервальная оценка. Доверительный интервал. Уровень значимости.
22. Интервальная оценка при малой выборке. Нормированное отклонение (коэффициент Стьюдента).
23. Понятие о планировании экспериментов. Определение необходимого объема выборочной совокупности.
24. Статистические гипотезы и их проверка. Параметрические и непараметрические критерии.
25. t-критерий Стьюдента. Проверка гипотез относительно средних.
26. F-критерий Фишера. Проверка гипотез для дисперсий.
27. X-критерий Ван-дер-Вардена.
28. Угловой критерий Фишера.
29. Критерий Манна-Уитни.
30. Проверка гипотез о законах распределения. Критерий X^2-хи квадрат.
31. Дисперсионный анализ. Градации факторов и их анализ. Простейшая схема однофакторного дисперсионного анализа.
32. Дисперсионный анализ. Рабочие формулы для вычисления средних квадратов.
33. Вычисление F-критерия для определения влияния изучаемого фактора. Количественная оценка влияния отдельных факторов.
34. Схема двухфакторного дисперсионного анализа. Вычисление F-критерия для определения влияния факторов. Количественная оценка влияния отдельных факторов.
35. Понятие корреляции. Функциональная и корреляционная зависимость. Графики рассеяния.
36. Коэффициент корреляции и его свойства.
37. Коэффициент корреляции рангов. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента линейной корреляции.
38. Регрессивный анализ. Линейная регрессия. Криволинейная регрессия.

39. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов.
40.Ряды динамики. Понятие временного ряда. Виды рядов. Определение тренда.
41.Анализ динамических рядов. Абсолютный прирост ряда . Коэффициент роста. Темп роста. Темп прироста.
42.Выравнивание динамических рядов:
   а) графический метод
   б) метод наименьших квадратов
43.Выравнивание динамических рядов:
   а) метод удлинения периодов
   б) метод скользящей средней
44.Математические методы оптимизации. Задачи линейного программирования.
45.Графический способ решения основной задачи линейного программирования.
46.Решение основной задачи линейного программирования симплекс-методом.
48.Элементы теории массового обслуживания. Основные характеристики СМО.
49. Виды измерений. Прямые измерения. Истинная погрешность измеряемой величины.
   - абсолютная погрешность
   - относительная погрешность
   - средняя квадратическая погрешность σ (стандартное отклонение)
   - коэффициентом вариации (CV)
50. Систематические погрешности и их виды.
51. Грубые погрешности и промахи. Критерии для оценки промахов.
   - критерий 3σ
   - критерий Романовского.
52. Случайные погрешности. Определение случайных погрешностей при помощи доверительного интервала при прямых измерениях.
53. Оценка погрешностей косвенных измерений. Запись результатов косвенных измерений

VII. ФОРМУЛЫ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ.

Производная

$Y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ - производная функции.

Таблица производных.

1. $y = C$ $\quad y' = 0$ 6. $y = \sin x$ $\quad y' = \cos x$
2. $y = x^n$ $\quad y' = nx^{n-1}$ 7. $y = \cos x$ $\quad y' = -\sin x$
3. $y = C \cdot x$ $\quad y' = C$ 8. $y = \operatorname{tg} x$ $\quad y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4. $y = \ell^x$ $\quad y' = \ell^x$ 9. $y = \operatorname{ctg} x$ $\quad y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5. $y = \ln x$ $\quad y' = \frac{1}{x}$

10. Производная суммы (разности) функций.

$y = U \pm V \qquad y' = U' \pm V'$

Производная произведения двух функций.

$y = U \cdot V \qquad y' = U'V + V'U$

12. Производная частного двух функций.

$y = \frac{U}{V} \qquad y' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$

13. Производная сложной функции.

$y = f(U)$, если $U = \psi(x)$

$y'_X = y'_U \cdot U'_X$

14. $dy = y'dx$ - дифференциал функции.

Неопределённый интеграл.

$\int f(x)dx = F(x) + C$

Таблица интегралов.

1. $\int X^n dx = \frac{X^{n+1}}{n+1} + c$ 5. $\int \cos x dx = \sin x + c$
2. $\int \frac{dX}{X} = \ln|X| + c$ 6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$
3. $\int \ell^x dx = \ell^x + c$ 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
4. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

Интегрирование по частям.

$\int UdV = U \cdot V - \int VdU$

Определённый интеграл.

$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ - Формула Ньютона - Лейбница.

Свойства определённого интеграла.

$$1.\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$2.\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$3.\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Вероятность события.

1. 0≤ P(A) ≤ 1 – вероятность события
2. $P(A) = \dfrac{m}{n}$ - классическая вероятность
3. $P*(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m}{n}$ статистическая вероятность

Алгебра событий.

1. P(A+B)=P(A)+P(B) –вероятность наступления одного из двух несовместимых событий.
2. P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) -вероятность наступления одного из двух совместимых событий.
3. P(A и B)=P(A)∗P(B) – вероятность одновременного наступления двух независимых событий.
4. P(A и B)=P(A)∗P(B/A)-вероятность одновременного наступления двух зависимых событий.

ФОРМУЛА БАЙЕСА

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j)\cdot P_{H_j}(A)}$$

где **A** -рассматриваемое событие
j-количество гипотез
$P(H_i)$ -вероятность i-той гипотезы (доопытная)
$P_{H_i}(A)$ - условная вероятность события **A** при соответствующей гипотезе
$P_A(H_i)$ - послеопытная вероятность i-той гипотезы

Случайная величина.

1.Законы распределения.

- Биноминальный закон.

$$P_{N,M} = C_n^m \cdot P^m(A)\cdot\left[1 - P(A)'\right]^{n-m}$$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2).....(n-m+1)}{m!}$$

- Распределение Пуассона.

$$P_{n,k} = \frac{\lambda^k \ell^{-\lambda}}{K!} \qquad \lambda = \mathrm{n} \cdot \mathrm{P}$$

- Нормальный закон распределения.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \ell^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\delta^2}}$$

$$P(\alpha \le x \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} \ell^{\frac{-(x-\bar{x})^2}{2\delta^2}} dx = \Phi(\frac{\beta - \bar{x}}{\delta}) - \Phi(\frac{\alpha - \bar{x})}{\delta})$$

- Элементы комбинаторики.

$P_n = n!$ - число перестановок

$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$ - число размещений

$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4... \cdot k}$ - число сочетаний

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - число сочетаний

Погрешности измерений: - систематические
- случайные
- грубые (промахи)

$\Delta \bar{x} = \left| \bar{x} - x \right|$ - абсолютная погрешность

$\delta = \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}} \cdot 100\%$ - относительная погрешность

$\kappa = \frac{\Delta x}{x_{\max}} \cdot 100$ - класс точности измерительного прибора

Характеристики распределения.

1. $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ...x_n}{n}$ – ñðåäíå - àðèôìåòè÷å ñêî.

2. $D = \frac{\sum (x_1 - \bar{x})^2}{n}$ – äèñïåðñèÿ

3. $\delta = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$ – ñòàíäàðòíî å îòêëîíåíèå

4. $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%$ - êîýôôèöèåíò âàðèàöèè

5. $Me = x_i + \lambda(\frac{\frac{n}{2} - \sum f_i}{f_{Me}})$ - медиана

6. $Mo = x_n + \lambda(\frac{f_2 - f_1}{2f_2 - f_1 + f_3})$ -мода

7. $As = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^3}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]^{\frac{3}{2}}}$ Коэффициент ассиметрии

8. $\acute{Y} = \dfrac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^4}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right]^{2}} - 3$ Эксцесс

Доверительный интервал.

1. $\overline{\mathrm{x}} - \mathrm{t_p}\dfrac{\delta}{\sqrt{\mathrm{n}}} \le \mu \le \overline{x} + t_p\dfrac{\delta}{\sqrt{n}}$
2. $\mathrm{n} = \dfrac{\mathrm{t_p^2} \cdot \delta^2}{\Delta^2}$

Критерии достоверности.

1. $\mathrm{t_p} = \dfrac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sum(x_i - \overline{x}_1)^2 + \sum(x_i - \overline{x}_2)^2}{n(n-1)}}}$ - критерий Стьюдента.
2. $\mathrm{F} = \dfrac{\delta_1^2}{\delta_2^2}$, если: $\delta_1^2 \succ \delta_2^2$ - критерий Фишера.
3. $\mathrm{X} = \sum \psi(\mathrm{R} / \mathrm{N} + 1)$ - критерий Ван - дер-Вардена.
4. $\mathrm{X}^2 = \sum \dfrac{(f - f')^2}{f'}$ - критерий $\mathrm{X_u} - \textit{квадрат.}$

Дисперсионный анализ.

1. $\sigma_0^2 = \dfrac{1}{N-1}(\sum x_{ij}^2 - \dfrac{T^2}{N})$ - общая дисперсия**.**
2. $\sigma_A^2 = \dfrac{1}{a-1}(\sum \dfrac{T_i^2}{n} - \dfrac{T^2}{N})$-дисперсия обусловленная влиянием фактора А.
3. $\sigma_e^2 = \dfrac{1}{N-a}(\sum x_{ij}^2 - \sum \dfrac{T_i^2}{n})$ -дисперсия обусловленная посторонними причинами.
4. $P = \dfrac{\sigma_A^2 - \sigma_e^2}{\sigma_A^2 + \sigma_e^2(n-1)}$ - степень влияния фактора А.

Двухфакторный дисперсионный анализ.

$$\sigma_A^2 = \frac{1}{в(a-1)}(\sum T_i^2 - \frac{T^2}{a})$$

$$\sigma_B^2 = \frac{1}{a(b-1)}(\sum T_j^2 - \frac{T^2}{b})$$

$$\sigma_e^2 = \frac{1}{(a-1)(b-1)}(\sum X_{ij}^2 - \frac{\sum T_j^2}{a} - \frac{\sum T_i^2}{b} + \frac{T^2}{ab})$$

$$F_A = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_e^2} \qquad F_B = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_e^2}$$

Корреляция и регрессия.

Коэффициент корреляции.

$$1.\ R = \frac{\sum (x_i - \overline{x}) \cdot (y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot \sum (y_i - \overline{y})^2}}$$

$$2.\ R = \frac{n\sum xy - \sum x \cdot \sum y}{\sqrt{n\sum x^2 - (\sum x)^2} * \sqrt{n\sum y^2 - (\sum y)^2}}$$

$$3.\ R = 1 - \frac{6\sum (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)}$$

Уравнение регрессии.

Y=ax+b

Коэффициенты регрессии.

$$a = \frac{n \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{\sum y_i \cdot \sum x_i^2 - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

VIII. Таблицы.

Таблица №1 Значение коэффициента Стьюдента (Р -вероятность)

N/P	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
2	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	1,9	2,4	3,0	3,5	5,0
9	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	1,9	2,3	2,8	3,3	4,8
11	1,8	2,2	2,8	3,2	4,6
12	1,8	2,2	2,7	3,1	4,5
13	1,8	2,2	2,7	3,1	4,3
14	1,8	2,2	2,7	3,0	4,2
15	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
16	1,8	2,1	2,6	2,9	4,0
17	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0
18	1,7	2,1	2,6	2,9	4,0

19	1,7	2,1	2,6	2,9	3,9
20	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
21	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
22	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
23	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
24	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
25	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
26	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
27	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
28	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
29	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
30	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	1,7	2,0	2,4	2,7	3,5
120	1,7	2,0	2,4	2,7	3,4
∞	1,7	2,0	2,3	2,6	3,3

Таблица 2. Площади под кривой нормального распределения.

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0,0	0,0000	0,0010	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106
0,9	0,3159	0,3186	0,3112	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,7382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887

2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934
2,5	0,4968	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986
3,0	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997

Таблица 3. Критические точки t- критерия Стьюдента при различных уровнях значимости α $R = n_1 + n_2 - 2$

Число степеней	**α,** %			Число степеней	**α**, %		
свободы **R**	**5**	**1**	**0,1**	свободы **R**	**5**	**1**	**0,1**
1	12,71	63,66	64,60	**18**	2,10	2,88	3,92
2	4,30	9,92	31,60	**19**	2,09	2,86	3,88
3	3,18	5,84	12,92	**20**	2,09	2,85	3,85
4	2,78	4,60	8,61	**21**	2,08	2,83	3,82
5	2,57	4,03	6,87	**22**	2,07	2,82	3,79
6	2,45	3,71	5,96	**23**	2,07	2,81	3,77
7	2,37	3,50	5,41	**24**	2,06	2,80	3,75
8	2,31	3,36	5,04	**25**	2,06	2,79	3,73
9	2,26	3,25	4,78	**26**	2,06	2,78	3,71
10	2,23	3,17	4,59	**27**	2,05	2,77	3,69
11	2,20	3,11	4,44	**28**	2,05	2,76	3,67
12	2,18	3,05	4,32	**29**	2,05	2,76	3,66
13	2,16	3,01	4,22	**30**	2,04	2,75	3,65
14	2,14	2,98	4,14	**40**	2,02	2,70	3,55
15	2,13	2,95	4,07	**60**	2,00	2,66	3,46
16	2,12	2,92	4,02	**120**	1,98	2,62	3,37
17	2,11	2,90	3,97	**∞**	1,96	2,58	3,29

Таблица 4. Значение F - критерия Фишера при уровнях значимости **α=5%** (верхняя строка) **α=1%** (нижняя строка)

R_2	R_1 - степени свободы для большей дисперсии							
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**

1	161	200	216	225	230	234	237	239
	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5982
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37
	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85
	34,12	30,82	29,16	28,71	28,42	27,91	27,67	27,49
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	6,00
	21,20	18,00	16,89	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82
	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15
	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73
	12,25	9,55	8,47	7,85	7,46	7,9	6,99	6,84
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44
	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23
	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07
	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95
	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74
12	4,75	3,80	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85
	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,83	2,77
	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70
	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64
	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59
	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55
	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	3,93	3,79	3,68
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51
	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48
	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,61
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45
	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42
	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40

	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37
	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36
	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34
	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32
26	4,22	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32
	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31
	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29
	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28
	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20
30	4,7	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27
	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24
	7,50	5,34	4,46	3,97	3,65	3,43	3,25	3,13
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23
	7,44	5,29	4,42	3,93	3,61	3,39	3,22	3,09
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21
	7,40	5,25	4,38	3,89	3,57	3,35	3,18	3,05
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19
	7,35	5,21	4,34	3,86	3,54	3,32	3,15	3,02
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18
	7,31	5,18	4,31	3,85	3,51	3,29	3,12	2,99
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17
	7,28	5,15	4,29	3,80	3,49	3,27	3,10	2,97
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16
	7,25	5,12	4,26	3,78	3,47	3,24	3,08	2,95
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,15
	7,22	5,10	4,24	3,76	3,44	3,22	3,06	2,93
48	4,04	3,19	2,80	2,57	2,41	2,30	2,21	2,14
	7,20	5,08	4,22	3,74	3,43	3,20	3,04	2,91
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13
	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10
	7,08	4,98	4,13	3,63	3,34	3,12	2,95	2,82
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07
	7,01	4,92	4,08	3,60	3,29	3,07	2,91	2,78
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06
	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74

100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03
	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00
	6,81	4,75	3,92	3,45	3,14	2,92	2,76	2,63
200	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98
	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60
∞	3,64	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94
	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51

продолжение табл. 4.

R_2	R_1 - степени свободы для большей дисперсии						
	9	**10**	**12**	**15**	**20**	**30**	**∞**
1	241	242	244	246	248	250	254
	6022	6056	6106	6157	6209	6261	6366
2	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,46	19,50
	99,39	99,40	99,42	99,43	99,45	99,47	99,50
3	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,62	8,53
	27,35	27,23	27,05	26,87	26,69	26,50	26,13
4	5,94	5,94	5,91	5,86	5,80	5,75	5,63
	14,66	14,55	14,37	14,20	14,02	13,84	13,46
5	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,50	4,36
	10,16	10,05	9,89	9,72	9,55	9,38	9,02
6	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,81	3,67
	17,98	7,87	7,72	7,56	7,40	7,23	6,88
7	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,38	3,23
	6,72	6,62	6,47	6,31	6,16	5,99	5,65
8	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,08	2,93
	5,91	5,81	5,67	5,52	5,36	5,20	4,86
9	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,86	2,71
	5,35	5,26	5,11	4,96	4,81	4,65	4,31
10	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,70	2,54
	4,94	4,85	4,71	4,56	4,41	4,25	3,91
11	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,57	2,40
	4,63	4,54	4,40	4,25	4,10	3,94	3,60
12	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,47	2,30
	4,39	4,30	4,16	4,01	3,86	3,70	3,36
13	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,38	2,21
	4,19	4,10	3,96	3,82	3,66	3,51	3,16
14	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,31	2,13
	4,03	3,94	3,80	3,66	3,51	3,35	3,00
15	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,25	2,07
	3,89	3,80	3,67	3,52	3,37	3,21	2,87

16	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,19	2,01
	3,78	3,69	3,55	3,41	3,26	3,10	2,75
17	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,15	1,96
	3,68	3,59	3,46	3,31	3,16	3,00	2,65
18	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,07	1,88
	3,60	3,51	3,37	3,23	3,08	2,92	2,57
19	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,07	1,88
	3,52	3,43	3,30	3,15	3,00	2,84	2,49
20	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,04	1,84
	3,46	3,37	3,23	3,09	2,94	2,78	2,42
21	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,01	1,81
	3,40	3,31	3,17	3,03	2,88	2,72	2,36
22	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	1,98	1,78
	3,35	3,26	3,12	2,98	2,83	2,67	2,31
23	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	1,96	1,76
	3,30	3,21	3,07	2,93	2,78	2,62	2,26
24	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,94	1,73
	3,26	3,17	3,03	2,89	2,74	2,58	2,21
25	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,92	1,71
	3,22	3,13	2,99	2,85	2,70	2,54	2,17
26	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,90	1,69
	3,18	3,09	2,96	2,81	2,66	2,50	2,13
27	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,88	1,67
	3,15	3,06	2,93	2,78	2,63	2,47	2,10
28	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,87	1,65
	3,12	3,03	2,90	2,75	2,60	2,44	2,06

Таблица 5. χ^2 - Распределение. Критические (процентные)точки для разных значений вероятности P и чисел степеней свободы R.

R	α, %				
	5	2,5	1	0,5	0,1
1	3,84	5,02	6,64	7,88	10,83
2	5,99	7,38	9,21	10,60	13,82
3	7,82	9,35	11,34	12,84	16,27
4	9,49	11,14	13,28	14,86	18,47
5	11,07	12,83	15,09	16,75	20,52
6	12,59	14,15	16,81	18,55	22,46
7	14,07	16,01	18,48	20,28	24,32
8	15,51	17,54	20,09	21,96	26,12
9	16,92	19,02	21,67	23,59	27,88
10	18,31	20,48	23,21	25,19	29,59
11	19,68	21,92	24,72	26,76	31,26

12	21,03	23,34	26,22	28,30	32,91
13	22,36	24,74	27,69	29,82	34,53
14	23,68	26,12	29,14	31,32	36,12
15	25,00	27,49	30,58	32,80	37,70
16	26,30	28,84	32,00	34,27	39,25
17	27,59	30,19	33,41	35,72	40,79
18	28,87	31,53	34,80	37,16	42,31
19	30,14	32,85	36,19	38,18	43,82
20	31,41	34,17	37,57	40,00	45,32
21	32,67	35,48	38,93	41,40	46,80
22	33,92	36,78	40,29	42,80	48,27
23	35,17	38,08	41,64	44,18	49,73
24	36,42	39,36	42,98	45,56	51,18
25	37,65	40,65	44,31	46,93	52,62
26	38,88	41,92	45,64	48,29	54,05
27	40,11	43,19	46,96	49,64	55,48
28	41,34	44,46	48,28	50,99	56,89
29	42,56	45,72	49,59	52,34	58,30
30	43,77	46,98	50,89	53,67	59,70
31	44,93	48,23	52,19	55,00	61,10
32	46,19	49,48	53,49	56,33	62,49
33	47,50	50,72	54,78	57,65	63,87
34	48,60	51,97	56,06	58,96	65,25
35	49,80	53,20	57,34	60,28	66,62
36	51,00	54,44	58,62	61,58	67,98
37	52,19	55,67	59,89	62,88	69,35
38	53,38	56,90	61,18	64,18	70,70
39	54,57	58,12	62,43	65,48	72,06
40	55,76	59,34	63,69	66,77	73,40
41	56,94	60,56	64,95	68,05	74,74
42	58,12	61,78	66,21	69,34	76,08
43	59,30	62,99	67,46	70,62	77,42
44	60,48	64,20	68,71	71,89	78,75
45	61,66	65,41	69,96	73,17	80,08
46	62,83	66,62	71,20	74,44	81,40
47	64,00	67,82	72,44	75,70	82,72
48	65,17	69,02	73,68	76,97	84,04
49	66,34	70,22	74,92	78,23	85,35
50	67,51	71,42	76,15	79,49	86,66
51	68,67	72,62	77,39	80,75	87,97
52	69,83	73,81	78,62	82,00	89,27
53	70,99	75,00	79,84	83,25	90,57
54	72,15	76,19	81,07	84,50	91,87

Таблица 6. Значение функции φ (R/N+1).

φ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	- ∞	-3,09	-2,88	-2,75	-2,65	-2,58	-2,51	-2,46	-2,41	-2,37
0,01	-2,53	-2,29	-2,26	-2,23	-2,20	-2,17	-2,14	-2,12	-2,10	-2,07
0,02	-2,05	-2,03	-2,01	-2,00	-1,98	-1,96	-1,94	-1,93	-1,91	-1,90
0,03	-1,88	-1,87	-1,85	-1,84	-1,83	-1,81	-1,80	-1,79	-1,77	-1,76
0,04	-1,75	-1,74	-1,73	-1,72	-1,71	-1,70	-1,68	-1,67	-1,66	-1,65
0,05	-1,64	-1,64	-1,63	-1,62	-1,61	-1,60	-1,59	-1,58	-1,57	-1,57
0,06	-1,55	-1,55	-1,54	-1,53	-1,52	-1,51	-1,51	-1,50	-1,49	-1,48
0,07	-1,48	-1,47	-1,46	-1,45	-1,45	-1,44	-1,43	-1,43	-1,42	-1,41
0,08	-1,41	-1,40	-1,39	-1,39	-1,38	-1,37	-1,37	-1,36	-1,35	-1,35
0,09	-1,34	-1,33	-1,33	-1,32	-1,32	-1,31	-1,30	-1,30	-1,29	-1,29
0,10	-1,28	-1,28	-1,27	-1,26	-1,26	-1,25	-1,25	-1,24	-1,24	-1,23
0,11	-1,23	-1,22	-1,22	-1,21	-1,21	-1,20	-1,20	-1,19	-1,19	-1,18
0,12	-1,18	-1,17	-1,17	-1,16	-1,16	-1,15	-1,15	-1,14	-1,14	-1,13
0,13	-1,13	-1,12	-1,12	-1,11	-1,11	-1,10	-1,10	-1,09	-1,09	-1,09
0,14	-1,08	-1,08	-1,07	-1,07	-1,06	-1,06	-1,05	-1,05	-1,05	-1,04
0,15	-1,04	-1,03	-1,03	-1,02	-1,02	-1,02	-1,01	-1,01	-1,01	-1,00
0,16	-0,99	-0,99	-0,99	-0,98	-0,98	-0,97	-0,97	-0,97	-0,96	-0,96
0,17	-0,95	-0,95	-0,95	-0,94	-0,94	-0,93	-0,93	-0,93	-0,92	-0,92
0,18	-0,92	-0,91	-0,91	-0,90	-0,90	-0,90	-0,89	-0,89	-0,89	-0,88
0,19	-0,88	-0,87	-0,87	-0,87	-0,86	-0,86	-0,86	-0,85	-0,85	-0,85
0,20	-0,84	-0,84	-0,83	-0,83	-0,83	-0,82	-0,82	-0,82	-0,81	-0,81
0,21	-0,81	-0,80	-0,80	-0,80	-0,79	-0,79	-0,79	-0,78	-0,78	-0,78
0,22	-0,77	-0,77	-0,77	-0,76	-0,76	-0,76	-0,75	-0,75	-0,75	-0,74
0,23	-0,74	-0,74	-0,73	-0,73	-0,73	-0,72	-0,72	-0,72	-0,71	-0,71
0,24	-0,71	-0,70	-0,70	-0,70	-0,69	-0,69	-0,69	-0,68	-0,68	-0,68
0,25	-0,67	-0,67	-0,67	-0,67	-0,66	-0,66	-0,66	-0,65	-0,65	-0,65
0,26	-0,64	-0,64	-0,64	-0,63	-0,63	-0,63	-0,63	-0,62	-0,62	-0,62
0,27	-0,61	-0,61	-0,61	-0,60	-0,60	-0,60	-0,60	-0,59	-0,59	-0,59
0,28	-0,58	-0,58	-0,58	-0,57	-0,57	-0,57	-0,57	-0,56	-0,56	-0,56
0,29	-0,55	-0,55	-0,55	-0,54	-0,54	-0,54	-0,54	-0,53	-0,53	-0,53
0,30	-0,53	-0,52	-0,52	-0,52	-0,51	-0,51	-0,51	-0,50	-0,50	-0,50
0,31	-0,50	-0,49	-0,49	-0,49	-0,48	-0,48	-0,48	-0,47	-0,47	-0,47
0,32	-0,47	-0,46	-0,46	-0,46	-0,46	-0,45	-0,45	-0,45	-0,45	-0,44
0,33	-0,44	-0,44	-0,43	-0,43	-0,43	-0,43	-0,43	-0,42	-0,42	-0,42
0,34	-0,41	-0,41	-0,41	-0,40	-0,40	-0,40	-0,40	-0,39	-0,39	-0,39
0,35	-0,39	-0,38	-0,38	-0,38	-0,37	-0,37	-0,37	-0,37	-0,36	-0,36
0,36	-0,36	-0,36	-0,35	-0,35	-0,35	-0,35	-0,34	-0,34	-0,34	-0,33
0,37	-0,33	-0,33	-0,33	-0,32	-0,32	-0,32	-0,32	-0,31	-0,31	-0,31
0,38	-0,31	-0,30	-0,30	-0,30	-0,30	-0,29	-0,29	-0,29	-0,28	-0,28

0,39	-0,28	-0,28	-0,27	-0,27	-0,27	-0,27	-0,26	-0,26	-0,26	-0,26
0,40	-0,25	-0,25	-0,25	-0,25	-0,24	-0,24	-0,24	-0,24	-0,23	-0,23
0,41	-0,23	-0,23	-0,22	-0,22	-0,22	-0,21	-0,21	-0,21	-0,21	-0,20
0,42	-0,20	-0,20	-0,20	-0,19	-0,19	-0,19	-0,19	-0,18	-0,18	-0,18
0,43	-0,18	-0,17	-0,17	-0,17	-0,17	-0,16	-0,16	-0,16	-0,16	-0,15
0,44	-0,15	-0,15	-0,15	-0,14	-0,14	-0,14	-0,14	-0,13	-0,13	-0,13
0,45	-0,13	-0,12	-0,12	-0,12	-0,12	-0,11	-0,11	-0,11	-0,11	-0,10
0,46	-0,10	-0,10	-0,10	-0,09	-0,09	-0,09	-0,09	-0,08	-0,08	-0,08
0,47	-0,08	-0,07	-0,07	-0,07	-0,07	-0,06	-0,06	-0,06	-0,06	-0,06
0,48	-0,05	-0,05	-0,05	-0,04	-0,04	-0,04	-0,04	-0,03	-0,03	-0,03
0,49	-0,03	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,00
0,50	+0,0	+0,0	+0,01	+0,01	+0,01	+0,01	+0,02	+0,02	+0,02	+0,02
0,51	0,03	0,03	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,05
0,52	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07
0,53	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	0,09	0,09	0,10	0,10
0,54	0,10	0,10	0,11	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12
0,55	0,13	0,13	0,13	0,13	0,14	0,14	0,14	0,14	0,15	0,15
0,56	0,15	0,15	0,16	0,16	0,16	0,16	0,17	0,17	0,17	0,17
0,57	0,18	0,18	0,18	0,18	0,19	0,19	0,19	0,19	0,20	0,20
0,58	0,20	0,20	0,21	0,21	0,21	0,21	0,22	0,22	0,22	0,23
0,59	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,25
0,60	0,25	0,26	0,26	0,26	0,26	0,27	0,27	0,27	0,27	0,28
0,61	0,28	0,28	0,28	0,29	0,29	0,29	0,30	0,30	0,30	0,30
0,62	0,31	0,31	0,31	0,31	0,32	0,32	0,32	0,32	0,33	0,33
0,63	0,33	0,33	0,34	0,34	0,34	0,35	0,35	0,35	0,35	0,36
0,64	0,36	0,36	0,36	0,37	0,37	0,37	0,37	0,38	0,38	0,38
0,65	0,39	0,39	0,39	0,39	0,40	0,40	0,40	0,40	0,41	0,41
0,66	0,41	0,42	0,42	0,42	0,42	0,43	0,43	0,43	0,43	0,44
0,67	0,44	0,44	0,45	0,45	0,45	0,45	0,46	0,46	0,46	0,46
0,68	0,47	0,47	0,47	0,48	0,48	0,48	0,48	0,49	0,49	0,49
0,69	0,50	0,50	0,50	0,50	0,51	0,51	0,51	0,52	0,52	0,52
0,70	0,52	0,53	0,53	0,53	0,54	0,54	0,54	0,54	0,55	0,55
0,71	0,55	0,56	0,56	0,56	0,57	0,57	0,57	0,57	0,58	0,58
0,72	0,58	0,59	0,59	0,59	0,59	0,60	0,60	0,60	0,61	0,61
0,73	0,61	0,62	0,62	0,62	0,63	0,63	0,63	0,63	0,64	0,64
0,74	0,64	0,65	0,65	0,65	0,66	0,66	0,66	0,67	0,67	0,67
0,75	0,67	0,68	0,68	0,68	0,69	0,69	0,69	0,70	0,70	0,70
0,76	0,71	0,71	0,71	0,72	0,72	0,72	0,73	0,73	0,73	0,74
0,77	0,74	0,74	0,75	0,75	0,75	0,76	0,76	0,76	0,77	0,77
0,78	0,77	0,78	0,78	0,78	0,79	0,79	0,79	0,80	0,80	0,80
0,79	0,81	0,81	0,81	0,82	0,82	0,82	0,83	0,83	0,83	0,84
0,80	0,84	0,85	0,85	0,85	0,86	0,86	0,86	0,87	0,87	0,87
0,81	0,88	0,88	0,89	0,89	0,89	0,90	0,90	0,90	0,91	0,91

0,82	0,92	0,92	0,92	0,93	0,93	0,93	0,94	0,94	0,95	0,95
0,83	0,95	0,96	0,96	0,97	0,97	0,97	0,98	0,98	0,99	0,99
0,84	0,99	1,00	1,00	1,01	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03
0,85	1,04	1,04	1,05	1,05	1,05	1,06	1,06	1,07	1,07	1,08
0,86	1,08	1,09	1,09	1,09	1,10	1,10	1,11	1,11	1,12	1,12
0,87	1,13	1,13	1,14	1,14	1,15	1,15	1,16	1,16	1,17	1,17
0,88	1,18	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,21	1,21	1,22	1,22
0,89	1,23	1,23	1,24	1,24	1,25	1,25	1,26	1,26	1,27	1,28
0,90	1,28	1,29	1,29	1,30	1,30	1,31	1,32	1,32	1,33	1,33
0,91	1,34	1,35	1,35	1,36	1,37	1,38	1,37	1,39	1,39	1,40
0,92	1,41	1,41	1,42	1,43	1,43	1,44	1,45	1,45	1,46	1,47
0,93	1,48	1,48	1,49	1,50	1,51	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55
0,94	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	1,60	1,61	1,62	1,63	1,64
0,95	1,64	1,65	1,66	1,67	1,68	1,70	1,71	1,72	1,73	1,74
0,96	1,75	1,76	1,77	1,79	1,80	1,81	1,83	1,84	1,85	1,87
0,97	1,88	1,90	1,91	1,93	1,94	1,96	1,98	2,00	2,01	2,03
0,98	2,05	2,07	2,10	2,12	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29
0,99	2,33	2,37	2,41	2,46	2,51	2,58	2,65	2,75	2,88	3,09

Таблица 7. Критические значения X-критерия Ван-дер-Вардена

N	N_1-N_2-0 или 1		N_1-N_2-2 или 3		N_1-N_2-4 или 5	
	Уровни значимостиα %		Уровни значимости α %		Уровни значимости α %	
	5	1	5	1	5	1
8	2,40	-	2,30	-	-	-
9	2,48	-	2,40	-	-	-
10	2,60	3,20	2,49	3,10	2,30	-
11	2,72	3,40	2,58	3,40	2,70	-
12	2,86	3,60	2,79	3,58	2,68	3,40
13	2,96	3,71	2,91	3,64	2,78	3,50
14	3,11	3,94	3,06	3,88	3,00	3,76
15	3,24	4,07	3,19	4,05	3,06	3,88
16	3,39	4,26	3,36	4,25	3,28	4,12
17	3,49	4,44	3,44	4,37	3,36	4,23
18	3,63	4,60	3,60	4,58	3,53	4,50
19	3,73	4,77	3,69	4,71	3,61	4,62
20	3,86	4,94	3,84	4,92	3,78	4,85
21	3,96	5,10	3,92	5,05	3,85	4,96
22	4,08	5,26	4,06	5,24	4,01	5,17
23	4,18	5,40	4,15	5,36	4,08	5,27
24	4,29	5,55	4,27	5,53	4,23	5,48
25	4,39	5,68	4,36	5,65	4,30	5,58

26	4,50	5,83	4,48	5,81	4,44	5,76
27	4,59	5,95	4,56	5,92	4,51	5,85
28	4,68	6,09	4,68	6,07	4,64	6,03
29	4,78	6,22	4,76	6,19	4,72	6,13
30	4,88	6,35	4,87	6,34	4,84	6,30
31	4,97	6,47	4,95	6,44	4,91	6,39
32	5,07	6,60	5,06	6,58	5,03	6,55
33	5,15	6,71	5,13	6,69	5,10	6,64
34	5,25	6,84	5,24	6,82	5,21	6,79
35	5,33	6,95	5,31	6,92	5,28	6,88
36	5,42	7,06	5,41	7,05	5,38	7,02
37	5,50	7,17	5,48	7,15	5,45	7,11
38	5,59	7,28	5,58	7,27	5,55	7,25
39	5,67	7,39	6,65	7,37	5,62	7,33
40	5,75	7,50	5,74	7,49	5,72	7,47
41	5,83	7,62	5,81	7,60	5,79	7,56
42	5,91	7,72	5,90	7,71	5,88	7,69
43	5,99	7,82	5,97	7,81	5,95	7,77
44	6,04	7,93	6,06	7,92	6,04	7,90
45	6,14	8,02	6,12	8,01	6,10	7,98
46	6,21	8,13	6,21	8,12	6,19	8,10
47	6,29	8,22	6,27	8,21	6,25	8,18
48	6,36	8,32	6,35	2,31	6,34	8,29
49	6,43	8,41	6,42	8,40	6,39	8,37
50	6,50	8,51	6,51	8,50	6,48	8,48
P	0,05	0,01	0,05	0,01	0,05	0,01

Таблица 8. Критические значения

Различия между двумя выборками можно считать значимыми ($p \leq 0.05$), если $U_{эмп}$ ниже или равен $U_{0,05}$, и тем более достоверным ($p < 0.01$), если $U_{эмп}$ ниже или равен $U_{0.01}$.

n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
n_2	**P=0.05**																		
3	-	0																	
4	-	0	1																
5	0	1	2	4															
6	0	2	3	5	7														
7	0	2	4	6	8	8	11												
8	1	3	5	8	10	13	15												
9	1	4	6	9	12	15	18	21											
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27										
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34									
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42								
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51							
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61						
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72					
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83				

17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96			
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109		
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138
	P=0,01																		
5	-	-	0	1															
6	-	-	1	2	3														
7	-	0	1	3	4	6													
8	-	0	5	4	6	7	9												
9	-	1	6	5	7	9	11	14											
10	-	1	6	6	8	11	13	16	19										
11	-	1	4	7	9	12	15	18	22	25									
12	-	2	5	8	11	14	17	21	24	28	31								
13	0	2	5	9	12	16	20	23	27	31	35	39							
14	0	2	6	10	13	17	22	26	30	34	38	43	47						
15	0	3	7	11	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56					
16	0	3	7	12	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66				
17	0	4	8	13	18	23	28	33	38	44	49	55	60	66	71	77			
18	0	4	9	14	19	24	30	36	41	47	53	59	65	70	76	82	88		
19	1	4	9	15	20	26	32	38	44	50	56	63	69	75	82	88	94	101	
20	1	5	10	16	22	28	34	40	47	53	60	67	73	80	87	93	100	107	114

n_1	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	
n_2	**P=0.05**																		
21	19	26	34	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113	121	130	138	146	154	
22	20	28	36	44	52	60	69	77	85	94	102	111	119	128	136	145	154	162	
23	21	29	37	46	55	63	72	81	90	99	107	116	125	134	143	152	161	170	
24	22	31	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	131	141	150	160	169	179	
25	23	32	41	50	60	69	79	89	98	108	118	128	137	147	157	157	177	187	
26	24	33	43	53	62	72	82	93	103	113	123	133	143	154	164	164	185	195	
27	25	35	45	55	65	75	86	96	107	118	128	139	150	160	171	182	193	203	
28	26	36	47	57	68	79	89	100	111	122	133	144	156	167	178	189	200	212	
29	27	38	48	59	70	82	93	104	116	127	139	150	162	173	185	196	208	220	
30	28	39	50	62	73	85	96	108	120	132	144	156	168	180	192	204	216	228	
31	29	41	52	64	76	88	100	112	124	137	149	161	174	186	199	211	224	236	
32	30	42	24	66	78	91	103	116	129	141	154	167	180	193	206	219	232	245	
33	31	43	56	68	81	94	107	120	133	146	159	173	186	199	213	226	239	253	
34	32	45	58	71	84	97	110	124	137	151	164	178	192	206	219	233	247	261	
35	33	46	59	73	86	100	114	128	142	156	170	184	198	212	226	241	255	269	
36	35	48	61	75	89	103	117	132	146	160	175	189	204	219	233	248	263	278	
37	36	49	63	77	92	106	121	135	150	165	180	195	210	225	240	255	271	286	
38	37	51	65	79	94	109	124	139	155	170	185	201	216	232	247	263	271	286	
39	38	52	67	82	97	112	128	143	159	175	190	206	222	238	254	270	286	302	
40	39	53	69	84	100	115	131	147	163	179	196	212	228	245	261	278	294	311	
P=0.01																			
21	10	16	22	29	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105	113	120	127	
22	10	17	23	30	37	45	52	59	66	74	81	89	96	104	111	119	127	134	
23	11	18	25	32	39	47	55	62	70	78	86	94	102	109	117	125	133	141	
24	12	19	26	34	42	49	57	66	74	82	90	98	107	115	123	132	140	149	
25	12	20	27	35	44	52	60	69	77	86	95	103	112	121	130	138	147	156	
26	13	21	29	37	46	54	63	72	81	90	99	108	117	126	136	145	154	163	
27	14	22	30	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	132	142	151	161	171	
28	14	23	32	41	50	59	69	78	88	98	108	118	128	138	148	158	168	178	
29	15	24	33	42	52	62	72	82	92	102	112	123	133	143	154	164	175	185	
30	15	25	34	44	54	64	75	85	95	106	117	127	138	149	160	171	182	192	
31	16	26	36	46	56	67	77	88	99	110	121	132	143	155	166	177	188	200	
32	17	27	37	47	58	69	80	91	103	114	126	137	149	160	172	184	195	207	

33	17	28	38	49	60	72	83	95	106	118	130	142	154	166	178	190	202	214	
34	18	29	40	51	62	74	86	98	110	122	134	147	159	172	184	197	209	222	
35	19	30	41	53	64	77	89	101	114	126	139	152	164	177	190	203	216	229	
36	19	31	42	54	67	79	92	104	117	130	143	156	170	183	196	210	223	236	
37	20	32	44	56	69	81	95	108	121	134	148	161	175	189	202	216	230	244	
38	21	33	45	58	71	84	97	111	125	133	152	166	180	194	208	223	237	251	
39	21	34	46	59	73	86	100	114	128	142	157	171	185	200	214	229	244	258	
40	22	35	48	61	75	89	103	117	132	146	161	176	191	206	221	236	251	266	

Таблица 9.

Уровни статистической значимости разных значений критерия φ^* Фишера

По полученному значению $\varphi^*_{эмп}$ определяется уровень значимости различий процентных долей.

р равно или меньше	**р равно или меньше** (последний десятичный знак)									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	2,91	2,81	2,70	2,62	2,55	2,49	2,44	2,39	2,35	
0,01	2,31	2,28	2,25	2,22	2,19	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07
0,02	2,05	2,03	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94	1,92	1,91	1,89
0,03	1,88	1,86	1,85	1,84	1,82	1,81	1,80	1,79	1,77	1,76
0,04	1,75	1,74	1,73	1,72	1,71	1,70	1,68	1,67	1,66	1,65
0,05	1,64	1,64	1,63	1,62	1,61	1,60	1,59	1,58	1,57	1,56
0,06	1,56	1,55	1,54	1,53	1,52	152	1,51	1,50	1,49	1,48
0,07	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45	1,44	1,43	1,43	1,42	1,41
0,08	1,41	1,40	1,39	1,39	1,38	1,37	1,37	1,36	1,36	1,35
0,09	1,34	1,34	1,33	1,32	1,32	1,31	1,31	1,30	1,30	1,29
0,10	1,29									

Таблица 10

Величины угла (в радианах) для разных процентных долей: $\varphi = 2\arcsin\sqrt{P}$

% доля	%, последний десятичный знак									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,020	0,028	0,035	0,040	0,045	0,049	0,053	0,057	0,060
0,1	0,063	0,066	0,069	0,072	0,075	0,077	0,080	0,082	0,085	0,087
0,2	0,089	0,092	0,094	0,096	0,098	0,100	0,102	0,104	0,106	0,108
0,3	0,110	0,111	0,113	0,115	0,117	0,118	0,120	0,122	0,123	0,125
0,4	0,127	0,128	0,130	0,131	0,133	0,134	0,136	0,137	0,139	0,140
0,5	0,142	0,143	0,144	0,146	0,147	0,148	0,150	0,151	0,153	0,154
0,6	0,155	0,156	0,158	0,159	0,160	0,161	0,163	0,164	0,165	0,166
0,7	0,168	0,169	0,170	0,171	0,172	0,173	0,175	0,176	0,177	0,178
0,8	0,179	0,180	0,182	0,183	0,184	0,185	0,186	0,187	0,188	0,189
0,9	0,190	0,191	0,192	0,193	0,194	0,195	0,196	0,197	0,198	0,199
1	0,200	0,210	0,220	0,229	0,237	0,246	0,254	0,262	0,269	0,277
2	0,284	0,291	0,298	0,304	0,311	0,318	0,324	0,330	0,336	0,342
3	0,348	0,354	0,360	0,365	0,371	0,376	0,382	0,387	0,392	0,398
4	0,403	0,408	0,413	0,418	0,423	0,428	0,432	0,437	0,442	0,446
5	0,451	0,456	0,460	0,465	0,469	0,473	0,478	0,482	0,486	0,491
6	0,495	0,499	0,503	0,507	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532

7	0,536	0,539	0,543	0,547	0,551	0,555	0,559	0,562	0,566	0,570
8	0,574	0,577	0,581	0,584	0,588	0,592	0,595	0,599	0,602	0,606
9	0,609	0,613	0,616	0,620	0,623	0,627	0,630	0,633	0,637	0,640
10	0,644	0,647	0,650	0,653	0,657	0,660	0,663	0,666	0,670	0,673
11	0,676	0,697	0,682	0,686	0,689	0,692	0,695	0,698	0,701	0,704
12	0,707	0,711	0,714	0,717	0,720	0,723	0,726	0,729	0,732	0,735
13	0,738	0,741	0,744	0,747	0,750	0,752	0,755	0,758	0,761	0,764
14	0,767	0,770	0,773	0,776	0,778	0,781	0,784	0,787	0,790	0,793
15	0,795	0,798	0,801	0,804	0,807	0,809	0,812	0,815	0,818	0,820
16	0,823	0,826	0,828	0,831	0,834	0,837	0,839	0,842	0,845	0,847
17	0,850	0,853	0,855	0,858	0,861	0,863	0,886	0,868	0,871	0,874
18	0,876	0,879	0,881	0,884	0,887	0,889	0,892	0,894	0,897	0,900
19	0,902	0,905	0,907	0,910	0,912	0,915	0,917	0,920	0,922	0,925
20	0,927	0,930	0,932	0,935	0,937	0,940	0,942	0,945	0,947	0,950
21	0,952	0,955	0,957	0,959	0,926	0,964	0,967	0,969	0,972	0,974
22	0,976	0,979	0,981	0,984	0,986	0,988	0,991	0,933	0,996	0,998
23	1,000	1,003	1,005	1,007	1,010	1,012	1,015	1,017	1,019	1,022
24	1,024	1,026	1,029	1,031	1,033	1,036	1,038	1,040	1,043	1,024
25	1,047	1,050	1,052	1,054	1,056	1,059	1,061	1,093	1,066	1,068
26	1,070	1,072	1,075	1,077	1,079	1,082	1,084	1,086	1,088	1,091
27	1,093	1,095	1,097	1,100	1,102	1,104	1,106	1,109	1,111	1,113
28	1,115	1,117	1,120	1,122	1,124	1,126	1,129	1,131	1,133	1,135
29	1,137	1,140	1,142	1,144	1,146	1,148	1,151	1,153	1,155	1,157
30	1,159	1,161	1,164	1,166	1,168	1,170	1,172	1,174	1,177	1,179
31	1,182	1,183	1,185	1,187	1,190	1,192	1,194	1,196	1,198	1,200
32	1,203	1,205	1,207	1,209	1,211	1,213	1,215	1,217	1,220	1,222
33	1,224	1,226	1,228	1,230	1,232	1,234	1,237	1,239	1,241	1,243
34	1,245	1,247	1,249	1,251	1,254	1,256	1,258	1,260	1,262	1,264
35	1,266	1,268	1,270	1,272	1,274	1,277	1,279	1,281	1,283	1,285
36	1,287	1,289	1,291	1,293	1,295	1,297	1299	1,302	1,304	1,306
37	1,308	1,310	1,312	1,314	1,316	1,318	1,320	1,322	1,324	1,326
38	1,328	1,330	1,333	1,335	1,337	1,339	1,341	1,343	1,345	1,347
39	1,349	1,351	1,353	1,355	1,357	1,359	1,361	1,363	1,365	1,367
40	1,369	1,371	1,374	1,376	1,378	1,380	1,382	1,384	1,386	1,388
41	1,390	1,392	1,394	1,396	1,398	1,400	1,402	1,404	1,406	1,408
42	1,410	1,412	1,414	1,416	1,418	1,420	1,422	1,424	1,426	1,428
43	1,430	1,432	1,434	1,436	1,438	1,440	1,442	1,444	1,446	1,448
44	1,451	1,453	1,455	1,457	1,459	1,461	1,463	1,465	1,467	1,469
45	1,471	1,473	1,475	1,477	1,479	1,481	1,483	1,485	1,487	1,489
46	1,491	1,493	1,495	1,497	1,499	1,501	1,503	1,505	1,507	1,509
47	1,511	1,513	1,515	1,517	1,519	1,521	1,523	1,525	1,527	1,529
48	1,531	1,533	1,535	1,537	1,539	1,541	1,543	1,545	1,547	1,549
49	1,551	1,553	1,555	1,557	1,559	1,561	1,563	1,565	1,567	1,569
50	1,571	1,573	1,575	1,577	1,579	1,581	1,583	1,585	1,587	1,589
51	1,591	1,593	1,595	1,597	1,599	1,601	1,603	1,605	1,607	1,609
52	1,611	1,613	1,615	1,617	1,619	1,621	1,623	1,625	1,627	1,629
53	1,631	1,633	1,635	1,637	1,639	1,641	1,643	1,645	1,647	1,649
54	1,651	1,653	1,655	1,657	1,659	1,661	1,663	1,665	1,667	1,669
55	1,671	1,673	1,675	1,667	1,679	1,681	1,683	1,685	1,687	1,689
56	1,691	1,693	1,695	1,697	1,699	1,701	1,703	1,705	1,707	1,709
57	1,711	1,713	1,715	1,717	1,719	1,721	1,723	1,725	1,727	1,729
58	1,731	1,734	1,736	1,738	1,740	1,742	1,744	1,746	1,748	1,750
59	1,152	1,754	1,756	1,758	1,760	1,762	1,764	1, 766	1,768	1,770
60	1,772	1,774	1,776	1,778	1,780	1,782	1,784	1, 786	1,789	1,791
61	1,793	1,795	1,797	1,799	1,801	1,803	1,805	1,807	1,809	1,811
62	1,813	1,815	1,817	1,819	1,821	1,823	1,826	1,828	1,830	1,832
63	1,834	1,836	1,838	1,840	1,842	1,844	1,846	1,848	1,850	1,853
64	1,855	1,857	1,859	1,861	1,863	1,865	1,867	1,869	1,871	1,873
65	1,875	1,878	1,880	1,882	1,884	1,886	1,888	1,890	1,892	1,894

66	1,897	1,899	1,901	1,903	1,905	1,907	1,909	1,911	1,913	1,916
67	1,918	1,920	1,922	1,924	1,926	1,928	1,930	1,933	1,935	1,937
68	1,939	1,941	1,943	1,946	1,948	1,950	1,952	1,954	1,956	1,958
69	1,961	1,963	1,965	1,967	1,969	1,971	1,974	1,976	1,978	1,980
70	1,982	1,984	1,987	1,989	1,991	1,993	1,995	1,998	2,000	2,002
71	2,004	2,006	2,009	2,011	2,013	2,015	2,018	2,020	2,022	2,024
72	2,026	2,029	2,031	2,033	2,035	2,038	2,040	2,042	2,044	2,047
73	2,049	2,051	2,053	2,056	2,058	2,060	2,062	2,065	2,067	2,069
74	2,071	2,074	2,076	2,078	2,081	2,083	2,085	2,087	2,090	2, 092
75	2,094	2,097	2,099	2,101	2,104	2,106	2,108	2,111	2,113	2, 115
76	2,118	2,120	2,122	2,125	2,127	2,129	2,132	2,134	2,136	2, 139
77	2,141	2,144	2,146	2,148	2,151	2,153	2,156	2,158	2,160	2, 163
78	2,165	2,168	2,170	2,172	2,157	2,177	2,180	2,182	2,185	2, 187
79	2,190	2,192	2,194	2,197	2,199	2,202	2,204	2,207	2,209	2, 212
80	2,214	2,217	2,219	2,222	2,224	2,227	2,229	2,231	2,234	2, 237
81	2,240	2,242	2,245	2,247	2,250	2,252	2,255	2,258	2,260	2,263
82	2,265	2,268	2,271	2,273	2,276	2,278	2,281	2,284	2,286	2,289
83	2,292	2,294	2,297	2,300	2,302	2,305	2,308	2,310	2,313	2,316
84	2,319	2,321	2,324	2,327	2,330	2,332	2,335	2,338	2,341	2,343
85	2,346	2,349	2,352	2,355	2,357	2,360	2,363	2,366	2,369	2,372
86	2,357	2,377	2,380	2,383	2,386	2,389	2,392	2,395	2,398	2,401
87	2,404	2,407	2,410	2,413	2,416	2,419	2,422	2,425	2,428	2,431
88	2,434	2,437	2,440	2,443	2,447	2,450	2,453	2,456	2,459	2,462
89	2,465	2,469	2,472	2,475	2,478	2,482	2,485	2,488	2,491	2,495
90	2,498	2,501	2,505	2,508	2,512	2,515	2,518	2,522	2,525	2,529
91	2,532	2,536	2,539	2,543	2,546	2,550	2,554	2,557	2,561	2,564
92	2,568	2,572	2,575	2,579	2,583	2,587	2,591	2,594	2,598	2,602
93	2,606	2,610	2,614	2,618	2,622	2,626	2,630	2,638	2,638	2,642
94	2,647	2,651	2,655	2,659	2,664	2,668	2,673	2,677	2,861	2,686
95	2,691	2,295	2,700	2,705	2,709	2,714	2,719	2,724	2,729	2,734
96	2,739	2,744	2,749	2,754	2,760	2,765	2,771	2,776	2,782	2,788
97	2,793	2,799	2,805	2,811	2,818	2,824	2,830	2,837	2,844	2,851
98	2,858	2,865	2,872	2,880	2,888	2,896	2,904	2,913	2,922	2,931
99,0	2,941	2,942	2,943	2,944	2,945	2,946	2,948	2,949	2,950	2,951
99,1	2,952	2,953	2,955	2,956	2,957	2,958	2,959	2,959	2,960	2,961
99,2	2,963	2,964	2,966	2,967	2,968	2,969	2,971	2,971	2,972	2,973
99,3	2,974	2,975	2,978	2,979	2,980	2,981	2,983	2,983	2,984	2,985
99,4	2,987	2,988	2,990	2,992	2,993	2,995	2,996	2,996	2,997	2,999
99,5	3,000	3,002	3,004	3,006	3,007	3,009	3,010	3,010	3,012	3,013
99,6	3,015	3,017	3,020	3,022	3,023	3,025	3,027	3,027	3,028	3,030
99,7	3,032	3,034	3,0338	3,040	3,041	3,044	3,046	3,046	3,048	3,050
99,8	3,052	3,054	3,059	3,062	3,064	3,067	3,069	3,069	3,072	3,075
99,9	3,078	3,082	3,089	3,093	3,097	3,101	3,107	3,107	3,113	3,122
100	3,142									

IX. Литература:

1. Гланц С. Медико-биологическая статистика: Пер. с англ.- М.: Практика,1998.- 459 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятности и математическая статистика.- М.: Высшее образование, 2009.- 479 с.
3. Гроссман С, Тернер Дж. Математика для биологов.- М.: Высшая школа, 1983.-384с.
4. Зайцев В.М. Прикладная математическая статистика.- Санкт-Петербург, 2003.- 432с.
5. Лакин Г.Ф. Биометрия. - М.: Высшая школа,1990.-352с.
6. Медик В.А. Статистика в медицине и биологии.- М.:Медицина.Т.1: Теоретическая статистика,2000.-412с.
7. Медик В.А. Статистика в медицине и биологии.- М.:Медицина,Т.2 Прикладная статистика здоровья, 2001.-352с.
8. Монич В.А. Малиновская С.Л. Введение в высшую математику и статистику. – НН: НГМА, 2006.-156с.
9. Морозов Ю.В. Основы высшей математики и статистики.- М.: Медицина, 2001.- 232 с.
10. Омельченко В.П., Э.В.Курбатова Практические занятия по высшей математике: учебное пособие.- Ростов-на-Дону: Феникс, 2006.- 350с.
11. Павлушков И.В. Основы высшей математики и математической статистики.- М.:ГЭОТАР-МЕДИА,2006.-424с.
12. Ремизов А.Н., Максина А.Г. Сборник задач по медицинской и биологической физике. 3-е изд., перераб. и дополн. –М.: Дрофа, 2008. – 192 с.
13. Рокицкий П.Ф. Биологическая статистик.- Минск, 1973.-20с.

Автор: Рокицкий П.Ф. Город: Минск. Издательство: Высшая школа. Год издания: 1973. Страниц: 320стр. …