

## Оценки погрешностей измерений

### 1. Виды измерений. Прямые измерения

**Измерение** – это нахождение значения физической величины опытным путем с помощью технических средств.

**Физическая величина** – это количественное значение параметров, оцениваемых физико-химических процессов, происходящих в любых реальных объектах. Это понятие может быть обобщенным, например, масса, длина, скорость и т.п., и может быть конкретным: частота пульса, скорость кровотока, длина руки и т.д.

**Технические средства**, или просто средства измерения - это в общем измерительные приборы, в которых измеренная информация представляется в форме доступной для восприятия (например, в виде цифр).

По способу получения результатов можно выделить измерения **прямые** и **косвенные**.

**Прямые измерения** заключаются в том, что искомое значение величины находят из опытных данных путем экспериментального сравнения. Например, температуру тела измеряют термометром, длину – линейкой.

Уравнение прямого измерения:  $y = cx$ ,

где  $c$  – цена деления,  $x$  – число делений.

**Косвенные измерения** заключаются в том, что искомое значение величины находят на основе известной зависимости (формулы) между этой величиной и величинами, найденными прямыми измерениями. Например, объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \text{ сопротивление } R = \frac{U}{I}.$$

Уравнение косвенного измерения:  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , где  $x_i$  – результат прямого измерения.

### Истинная погрешность измеряемой величины

**Погрешность измерения**  $\Delta x_{\text{изм}}$  – это отклонение результата измерения  $x$  от истинного (действительного)  $x_u$  значения измеряемой величины.

$$\Delta x_{\text{изм}} = x - x_u.$$

На точность измерения влияет большое количество факторов, поэтому оценка погрешности очень важна для обеспечения единства измерений. Для практических целей достаточно рассмотреть систематические и случайные составляющие общей погрешности, выраженные в абсолютных и относительных единицах при прямых и косвенных измерениях.

#### • Абсолютная погрешность измеряемой величины

Абсолютная погрешность измерения  $\Delta$  - это разность между результатом измерения  $x$  и фактическим значением  $x_u$  измеряемой величины:

$$\Delta = x - x_u.$$

Она выражается в тех же единицах, что и сама измеряемая величина.

- **Относительная погрешность измеряемой величины**

Относительная погрешность измерения  $\delta$  – это относительная абсолютная погрешность к самой измеряемой величине  $x$  или к ее истинному значению  $x_u$ .

Выражается в процентах: 
$$\delta = \pm \frac{\Delta}{x_u} \cdot 100\%.$$

- **Средняя квадратическая погрешность**

Для оценки рассеяния отдельных результатов  $\bar{x}$  определяют абсолютную среднюю квадратическую погрешность (ошибку). В литературе этот термин имеет ряд синонимов. Это или «исправленное среднее квадратическое отклонение», или «стандартное отклонение», или «средняя квадратическая ошибка», или «стандарт измерения».

**Средней квадратической погрешностью**, или **стандартным отклонением**, называется величина:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Квадрат этой величины называется **дисперсией**.

- Относительная величина средней квадратической погрешности, выраженная в процентах, называется **коэффициентом вариации (CV)**.

$$CV = \frac{s}{x} \cdot 100\%.$$

### **Систематические погрешности**

В зависимости от характера проявления, причин возникновения и возможностей устранения различают систематическую и случайную составляющую погрешности измерений, а также грубые погрешности (промахи).

**Систематическая погрешность  $\Delta_c$**  – это погрешность, которая остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одного и того же параметра. Она может возникать, в частности, если при измерениях не учитывается влияние некоторых факторов.

Например, может быть погрешность при отсчете давления по ртутному барометру, если не учитывается температура окружающей среды.

Систематические погрешности могут быть обусловлены неисправностью измерительных приборов, например, смещением нуля шкалы.

### **Грубые погрешности и промахи.**

Грубые погрешности возникают из-за ошибочных действий оператора, неисправности средств измерения или разных условий измерений. Как правило, грубые погрешности выявляются в результате обработки результатов измерений с помощью специальных критериев.

### **Критерии для оценки промахов.**

1. **Критерий  $3\sigma$**  используют, если число измерений  $n \geq 20$ .

Взяв сомнительный результат,  $x_i$ , рассматривают по модулю  $|x_i - \bar{x}|$  между предполагаемым промахом и средним значением, если эта разность  $|x_i - \bar{x}| > 3\sigma$ , то он мало вероятен и его можно отбросить.

2. **Критерий Романовского.** Его используют, если  $n < 20$ .

Вычисляют модуль отношения  $\left| \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right| = \beta$ ,

где  $x_i$  - предполагаемый промах, а  $\bar{x}$  - среднее без значения этого промаха. Полученное значение  $\beta$  сравнивают с теоретическим  $\beta_T$  при выбранном уровне значимости  $\alpha$  по таблице 1.

Уровень значимости $\alpha$	Число измерений						
	n=4	n=6	n=8	n=10	n=12	n=15	n=20
0,01	1,73	2,16	2,44	2,62	2,75	2,90	3,08
0,02	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,96
0,05	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,1	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,62

Обычно выбирают  $\alpha \leq 0,01 \div 0,05$ , и если расчетное  $\beta \geq \beta_T$ , результат отбрасывают.

**Пример 1.**

Измерение напряжения: **22; 24; 26; 28; 48 В.** Последний результат ставим под сомнение. Найдем  $\beta$ .

$$\bar{x} = \frac{22 + 24 + 26 + 28}{4} = 25(B)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{3^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-3)^2}{4 - 1}} = 2,6(B)$$

$$\beta = \left| \frac{48 - 25}{2,6} \right| = 8,8.$$

При  $n=4$ , при  $\alpha \leq 0,05$ ,  $\beta_T = 1,71$ ,  $\beta > \beta_T$ ,  $8,8 > 1,71$ .

Следовательно, последний результат 48В должен быть отброшен.

**Пример 2.**

Измерение силы тока дало следующие результаты: **10,07; 10,08; 10,10; 10,12; 10,13; 10,15; 10,16; 10,17; 10,20; 10,40 А.**

Последний результат вызывает сомнение, хотя и отличается незначительно.

Не промах ли это? Находим среднее:

$$\bar{x} = 10,16(A) \text{ и } \sigma = 0,094 (B)$$

$$\beta = \left| \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right| = \frac{10,40 - 10,16}{0,094} = 2,67.$$

При  $n=10$  и  $\alpha \leq 0,05$ ,  $\beta_T = 2,41$ ,  $\beta \geq \beta_T$ ,  $2,67 > 2,41$ .

Следовательно, результат 10,40А является промахом.

**Случайные погрешности.**

**Случайная погрешность  $\Delta$** - это погрешность, значение которой случайным образом меняются при повторных измерениях.

Значение случайной погрешности заранее неизвестно. Случайные ошибки возникают из-за влияния различных неконтролируемых причин. Например, при

измерении времени секундомером можно один раз нажать на кнопку чуть раньше, а другой- чуть позже, чем надо. Или, наливая жидкость в кювету, можно уровень установить чуть выше или чуть ниже нужного деления и т.п. Случайные погрешности могут возникать из-за колебаний температуры в помещении и т.п. Случайные погрешности нельзя исключить полностью, но их влияние может быть уменьшено путем обработки результатов измерений.

### **Определение случайных погрешностей при помощи доверительного интервала при прямых измерениях.**

Пусть проведено  $n$  измерений величины  $x$  и получено  $n$  значений:

$$x_1; x_2; \dots; x_n.$$

1. Вычислить среднюю арифметическую:  $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

2. Вычислить абсолютную погрешность результатов отдельных наблюдений.

$$|\Delta x_i| = |x_i - \bar{x}|, \text{ где } i=1, 2, \dots, n.$$

$$|\Delta x_1| = |x_1 - \bar{x}|,$$

$$|\Delta x_2| = |x_2 - \bar{x}|,$$

...

$$|\Delta x_n| = |x_n - \bar{x}|.$$

3. Вычислить среднюю квадратическую погрешность (стандарт) по формуле:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

4. Исключить ошибки промаха, которые могут сильно исказить результат.

5. Рассчитать границы доверительного интервала  $(\bar{x} - \Delta x; \bar{x} + \Delta x)$ , где  $\Delta x$  - это случайная погрешность. Случайная погрешность  $\Delta \delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t$ , где  $t_{n,\alpha}$  - коэффициент Стьюдента, находится из таблицы.

$\alpha = 1 - p$  - это уровень ошибки (значимости).

6. Записать окончательный результат.

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \quad (p \geq 0.95).$$

Этот доверительный интервал должен быть значительно меньше систематической погрешности.

7. Определить систематическую погрешность прибора  $\Delta_C$

8. Сравнить систематическую погрешность  $\Delta_C$  со случайной погрешностью  $\Delta x$ .

- Если окажется, что одна из них в 3 раза и более больше другой, то границы доверительного интервала устанавливаются по большей погрешности:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \quad \text{или} \quad x = \bar{x} \pm \Delta_C$$

- Если эти погрешности примерно равны, то надо рассчитать суммарную погрешность  $\delta$  по формуле:

$$\delta = \Delta_C + 2\Delta x.$$

Тогда доверительный интервал примет вид  $x = \bar{x} \pm \delta$

9. Записать окончательный результат.

### Пример 3.

С помощью секундомера было проведено 5 измерений одинаковых промежутков времени: 89,6; 89,2; 89,4; 89,0; 89,5.

1. Среднее значение:

$$\bar{x} = \frac{89,6 + 89,2 + 89,4 + 89,0 + 89,5}{5} = 89,34 \approx 89,3(c).$$

2. Абсолютная погрешность отдельных измерений  $x_i - \bar{x}$ .

$$0,3; 0,1; 0,1; 0,3; 0,2.$$

3. 
$$\sigma = \sqrt{\frac{0,3^2 + 0,1^2 + 0,1^2 + 0,1^2 + 0,3^2 + 0,2^2}{4}} = 0,3(c).$$

4. Максимальная погрешность в 1-м и 4-м случаях. Проверим их на промах, используя любой критерий, и видим, что промаха нет.

5. Граница доверительно интервала:

$$\Delta\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_{\alpha \leq 0,05, n},$$

$$t_{\alpha \leq 0,05; 5} = 2,8 \text{ (из таблицы Стьюдента),}$$

$$\Delta x = \frac{0,3}{\sqrt{5}} \cdot 2,8 = 2,28 \approx 0,3(c).$$

6. Запишем окончательный результат:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x = 89,3 \pm 0,3(p \geq 0,95).$$

7. Систематическая ошибка секундомера равна половине цене деления прибора (наименьшее деление секундомера 0,2с):

$$\Delta_c = \frac{0,2}{2} = 0,1(c).$$

8. Сравним случайную  $\Delta x$  и систематическую  $\Delta_c$  ошибки: 0,3 и 0,1.

Случайная больше в 3 раза и систематической ошибкой можно пренебречь.

9. Окончательно  $x = 89,3 \pm 0,3$  ( $\delta \geq 0,95$ ).

## Оценка погрешностей косвенных измерений

На практике очень часто интересующая нас величина вычисляется по некоторой формуле, а не измеряется непосредственно. То есть косвенные измерения предполагают наличие функциональной связи.

$y = f(x_i)$ , где  $x_i$  - прямое измерение.

Погрешность  $\Delta y$  в оценке  $Y$  зависит от погрешностей при измерениях аргумента  $x_i$ .

Правила оценки погрешностей косвенных измерений:

Абсолютная погрешность суммы или разности равна корню квадратному из суммы абсолютных погрешностей слагаемых.

$$\text{Если } Y = x_1 + x_2 \text{ то } \Delta Y = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}.$$

Относительная погрешность произведения (дроби) равна корню квадратному из суммы квадратов относительных ошибок сомножителей (числителя и знаменателя).

Если  $Y = x_1 \cdot x_2$  или  $Y = \frac{x_1}{x_2}$ ,

$$\text{то } \frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_2}{x_2}\right)^2}.$$

### Запись результатов косвенных измерений

Все вычисления ошибок надо выполнять приближенно, лишь оценивая, в каких пределах эта ошибка может заключаться. Следует учесть, что все формулы теории ошибок выведены для нормального распределения при большом числе измерений. На практике чаще всего закон распределения может отличаться от нормального и число измерений небольшое.

Практически надо руководствоваться следующим правилом:

1. Все расчеты вести с точностью до двух знаков (часто достаточно и одного), широко пользуясь правилами округления.
2. Нет смысла указывать в результате те знаки, значение которых меньше чем ошибка измерений. Например, измеряя массу  $m$ , получили:

$$m = 144,23 \pm 1 \text{ (г)}.$$

Это неправильная запись. Если ошибка 1 г, то зачем сотые доли?

Правильно будет:  $m = 144 \pm 1 \text{ (г)}$ .

Или, рассчитывая сопротивление  $R$ , получили:  $R = 24,4785 \pm 0,02 \text{ (Ом)}$

Это неправильно. Правильно будет округлить результат до сотых (как в ошибке):  $R = 24,49 \pm 0,02 \text{ (Ом)}$ .

### Пример 4

Сопротивление резистора измеряется с помощью моста Уитстона:

$$R_x = \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

Найти неизвестное сопротивление и его абсолютную и относительную ошибку.

Дано:

$$R_1 = 1057 \pm 1 \text{ Ом}$$

$$R_2 = 216,5 \pm 0,3 \text{ Ом}$$

$$R_3 = 58,1 \pm 0,1 \text{ Ом}$$

$$R_x = ? \quad \Delta R_x = ?$$

$$\frac{\Delta R_x}{R_x}$$

Решение:

$$R_x = \frac{R_1 R_2}{R_3}$$

$$R_x = \frac{1057 \cdot 216,5}{58,1} = 3940 \text{ Ом}.$$

Относительную ошибку находим по формуле:

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_2}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_3}{R_3}\right)^2} \quad \frac{\Delta R_x}{R_x} = \sqrt{\left(\frac{1}{1057}\right)^2 + \left(\frac{0,3}{216,5}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{58,1}\right)^2} \approx 0,25\%$$

Абсолютная ошибка равна:  $\Delta R_x = R_x \cdot 0,25\%$

$$\Delta R_x = 3940 \cdot 0,0025 = 10 \text{ Ом}$$

Ответ:  $R_x \pm \Delta R_x = 3940 \pm 10 \text{ (Ом)}$ .

### Задачи для самостоятельного решения на оценку погрешностей измерений.

1. В результате десяти измерений диаметра капилляра (мкм) в стенке лёгочных альвеол были получены следующие данные: 2,83; 2,82; 2,81; 2,85; 2,87; 2,86; 2,83; 2,85; 2,83; 3,44. Выбрать критерий для оценки промахов и исключить промахи. Определить абсолютную и относительную погрешность.

2. При определении микроаналитическим способом содержания азота в данной пробе были получены следующие результаты: 9,29; 9,38; 9,35; 9,43; 9,53; 9,48; 9,61; 9,98 (%). Выбрать критерий для оценки промахов и исключить промахи. Определить абсолютную и относительную погрешность.

3. При фотоэлектроколориметрическом определении концентрации ацетилсалициловой кислоты на основании реакции с сульфатом меди и пиридином были получены следующие результаты: 99,2%; 99,0%; 98,9%; 99,3%; 98,8%; 99,2%; 99,0%; 98,9%; 99,3%; 98,8%; 99,2%; 99,0%; 98,9%; 99,3%; 98,8%; 99,2%; 99,0%; 98,9%; 99,3%; 98,8%; 109,1 %. Выбрать критерий для оценки промахов и исключить промахи. Определить абсолютную и относительную погрешность.

4. При анализе лекарственного препарата (с целью контроля его качества) метазона – 1%-ного раствора для инъекций – найдены следующие значения pH этого раствора: 4,50; 4,52; 4,55; 4,60; 4,70; 5,25. Выбрать критерий для оценки промахов и исключить промахи. Определить абсолютную и относительную погрешность.

5. В десяти одинаковых пробах были получены следующие значения содержания марганца: 0,69; 0,70; 0,67; 0,66; 0,67; 0,68; 0,67; 0,69; 0,68; 0,87 (%). Выбрать критерий для оценки промахов и исключить промахи. Определить абсолютную и относительную погрешность.

6. При определении посторонних примесей в образце лекарственного препарата найдено суммарное содержание примесей : 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,8; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; (%). Выбрать критерий для оценки промахов и исключить промахи. Определить абсолютную и относительную погрешность.

7. Средняя масса таблетки сульфадиметоксина при десятикратном измерении равна 0,528 г. Абсолютная погрешность при измерении массы таблетки при доверительной вероятности 0,95,  $\Delta m = 0,002$  г. Средний объем таблетки  $V = 0,2$  см<sup>3</sup>. Определить, с какой абсолютной погрешностью  $\Delta V$  нужно произвести измерение объема, чтобы абсолютная погрешность плотности сульфадиметоксина была равна 0,04 г/см<sup>3</sup>.

8. Вязкость спирта  $\eta$  с помощью вискозиметра Оствальда можно вычислить по формуле:  $\eta = \eta_0 \frac{\rho \cdot t}{\rho_0 \cdot t_0}$ , где ( $\eta_0 = 1 \pm 0,01$  Па·с) – вязкость воды,

( $\rho_0 = 1 \pm 0,01$  г/см<sup>3</sup>) – плотность воды, ( $\rho = 0,79 \pm 0,01$  г/см<sup>3</sup>) – плотность спирта, ( $t_0 = 20 \pm 1$  с – время истечения воды, ( $t = 15 \pm 1$  с) – время истечения спирта. Найти значение вязкости спирта и его абсолютную и относительную ошибку.

9. Вязкость ртути  $\eta$  с помощью вискозиметра Оствальда можно вычислить по формуле:  $\eta = \eta_0 \frac{\rho \cdot t}{\rho_0 \cdot t_0}$ , где ( $\eta_0 = 1 \pm 0,01$  Па·с) – вязкость воды,

( $\rho_0 = 1 \pm 0,01$  г/см<sup>3</sup>) – плотность воды, ( $\rho = 13,6 \pm 0,1$  г/см<sup>3</sup>) – плотность ртути, ( $t_0 = 36 \pm 3$  с – время истечения воды, ( $t = 4 \pm 1$  с) – время истечения ртути. Найти значение вязкости ртути и его абсолютную и относительную ошибку.

10. Коэффициент поверхностного натяжения спирта можно определить с помощью сталагмометра методом отрыва капле по формуле:

$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{n_2 \cdot \rho_1}{n_1 \cdot \rho_2}$ , где ( $\sigma_2 = 0,073 \pm 0,002$  н/м) – коэффициент поверхностного натяжения воды, ( $\rho_2 = 1 \pm 0,01$  г/см<sup>3</sup>) – плотность воды, ( $\rho_1 = 0,79 \pm 0,01$  г/см<sup>3</sup>) – плотность спирта, ( $n_1 = 100 \pm 3$ ) – число капель спирта, ( $n_2 = 34 \pm 1$ ) – число капель воды. Найти коэффициент поверхностного натяжения спирта и его абсолютную и относительную ошибку.

11. Коэффициент поверхностного натяжения ртути можно определить с помощью сталагмометра методом отрыва капле по формуле:

$\sigma_1 = \sigma_2 \frac{n_2 \cdot \rho_1}{n_1 \cdot \rho_2}$ , где ( $\sigma_2 = 0,073 \pm 0,002$  н/м) – коэффициент поверхностного натяжения воды, ( $\rho_2 = 1 \pm 0,01$  г/см<sup>3</sup>) – плотность воды, ( $\rho_1 = 13,6 \pm 0,1$  г/см<sup>3</sup>) – плотность ртути, ( $n_1 = 100 \pm 3$ ) – число капель ртути, ( $n_2 = 34 \pm 1$ ) – число капель воды. Найти коэффициент поверхностного натяжения ртути и его абсолютную и относительную ошибку.