

Теория вероятностей.

Вероятность случайного события.

Событие называется случайным, если в результате данного испытания оно может либо произойти, либо не произойти. Обозначение А, В, С....

Пример: в ящике цветные шары. Вытаскивают 1 шар – это испытание, появление шара определенного цвета – событие.

Чем больше количество этих событий, тем отчетливее проявляются закономерности, и тем более достоверно может быть предсказан результат. Эти закономерности называются статистическими, они имеют объективный характер, присущий всем явлениям внешнего мира.

❖ **Классическая вероятность** $P(A)$ события А – это отношение числа благоприятствующих этому событию исходов m , к общему числу всех элементарных событий n .

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

❖ **Статистическая вероятность** $P^*(A)$ события А – это предел отношения числа испытаний, в котором событие А произошло, к общему числу испытаний.

$$P^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n}$$

Алгебра событий.

а) теорема сложения вероятностей

Суммой двух событий А и В является событие, которое заключается в появлении события А или В.

Если события несовместимы, то вероятность появления одного из двух событий равна сумме вероятностей этих событий и определяется по формуле: $P(A + B) = P(A) + P(B)$

Следствия:

1. Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \dots$ образующих полную группу равна единице.

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

2. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + \overline{P(A)} = 1$$

Задача: В ящике 4 белых + 2 красных + 8 зеленых + 3 черных. Извлекают 1 шар, какова вероятность, что шар цветной?

$$\text{Решение: } P(A+B+C) = \frac{13}{17}$$

Задача:

Аптека получает медикаменты из пункта А, В, С. Вероятность поступления лекарства из А=0,7, из В=0,2. Найти вероятность того, что медикаменты получены из С.

Решение:

События образуют полную группу $0,7+0,2+ P(C)=1 \rightarrow P(C)=0,1$

Если события совместимы, то вероятность появления хотя бы одного из двух этих событий равна сумме вероятностей без вероятности их совместного появления.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Задача: : Из колоды карт вытаскиваем 1 карту, какова вероятность вынимания либо черной масти, либо дамы.

Решение:

$n=36$ А-событие вынимания черной масти

В- событие вынимания дамы

$$P(A+B) = \frac{1}{2} + \frac{4}{36} - \frac{2}{36} = \frac{20}{36}$$

б) теорема произведения вероятностей

Произведением двух событий А и В является событие С, которое заключается в одновременном появлении события А и В.

Если события независимые

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Задача: Медсестра обслуживает в палате 4-х больных. Вероятность того, что 1-му больному потребуется внимание в течении часа $=0,2$; $P(B)=0,3$; $P(C)=0,25$; $P(D)=0,1$. Найти вероятность что всем больным потребуется помощь.

Решение:

$$P(A \text{ и } B \text{ и } C \text{ и } D) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,25 \cdot 0,1 = 0,0015$$

Если события зависимые:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

$P(B/A)$ -условная вероятность(вероятность события В при условии что событие А уже произошло)

Задача: В ящике 10 шаров(4 белых и 6 черных), вынимают подряд два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

Решение:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = 4/10 \cdot 3/9 = 4/30$$

Вероятность появления хотя бы одного события.

В некоторых случаях вероятность события удобно подсчитывать как вероятность противоположного другому событию.

Пусть события $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ независимы и известны вероятности этих событий: $P(A_1)=p_1, P(A_2)=p_2, P(A_3)=p_3, \dots, P(A_n)=p_n$,

Обозначим вероятности противоположных событий:

$$P(\bar{A}_1) = q_1, P(\bar{A}_2) = q_2, P(\bar{A}_3) = q_3, \dots, P(\bar{A}_n) = q_n,$$

Найдём вероятность того, что ни одно из событий в опыте не наступит:

$$P(B) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n$$

В этом случае искомая вероятность, т.е. вероятность появления хотя бы одного события, определяется как вероятность противоположного события:

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \dots \cdot q_n,$$

Задача: Студент отвечает на 4 дополнительных вопроса при сдаче экзамена. Вероятность правильного ответа на каждый вопрос $1/4$. Предполагая, что все ответы — события независимые, найти вероятность того, что будет дано хотя бы два правильных ответа.

Решение: $B = \{\text{хотя бы два правильных ответа}\}$ — это 2, 3 или 4.

Так как $P(A) = 1/4$, то $P(\bar{A}) = 1 - 1/4 = 3/4$ — вероятность неправильного ответа на вопрос. Эту задачу удобно решать, используя противоположные события, т.е. пользуясь равенством:

$$P(B) = 1 - [P_4(0) + P_4(1)]$$

$$P_4(0) = C_4^0 \cdot P^0 \cdot (1-P)^4 = 0,32$$

$$P_4(1) = C_4^1 \cdot P^1 \cdot (1-P)^{4-1} = 0,42$$

$$P(B) = 1 - [P_4(0) + P_4(1)] = 1 - (0,32 + 0,42) = 0,26$$

$$\text{Ответ: } P(B) = 0,26$$

Задачи для самостоятельного решения.

1. При обследовании 300 студентов путём флюорографии были выявлены следующие заболевания: у 5 человек — плеврит, у 8 — остаточные явления после пневмонии. Найти вероятности этих заболеваний, выявленных с помощью флюорографии.
2. Аптечный склад получает медикаменты с медицинских предприятий 3-х городов А, В и С. Вероятность получения медикаментов из города А $P(A) = 0.6$, из города В $P(B) = 0.3$. Найти вероятность того, что медикаменты получены из города С.
3. На клумбе растут 20 красных, 30 синих и 40 белых астр. Какова вероятность сорвать в темноте цветную астру, если срывают одну астру?
4. В марте 7 дней шел снег, 10 — дождь, из них 4 дня — снег с дождем. Найти вероятность того, что в наугад выбранный день шел дождь или снег.
5. Вероятность хотя бы одного вызова врача в течение часа $P = 0.7$. Найти вероятность того, что в течение часа не последует вызова.
6. В большой популяции плодовой мушки 25% мух имеют мутацию глаз, 50% — мутацию крыльев, а 40% мух с мутацией глаз имеют и мутацию крыльев. Какова вероятность того, что у мухи, наудачу выбранной из этой популяции, окажется либо мутация глаз, либо мутация крыльев?

7. Медицинская сестра обслуживает в палате четырёх больных. Вероятность того, что в течение часа внимания сестры потребует первый больной - $P(A)=0.2$, второй больной- $P(B)=0.3$, третий- $P(C)=0.25$, четвёртый больной- $P(D)=0.1$. Найти вероятность того, что в течение часа все больные потребуют внимания медсестры.

8. Представим, что в группе из 10 человек есть четверо мужчин. Если случайным образом выбирают двух человек, то какова вероятность, что:

оба-мужчины;

обе-женщины;

3) один- мужчина и одна –женщина.

9. Вероятность попадания в опухолевую клетку «мишень» первого радионуклида равна $P_1=0.7$, а второго- $P_2=0.8$. Найти вероятность попадания в клетку – «мишень», если бы одновременно использовались оба препарата.

10. Три врача независимо друг от друга осмотрели одного и того же больного. Вероятность того, что первый врач допустит ошибку при установлении диагноза, равна 0.01. Для второго и третьего врачей эта вероятность соответственно 0.015 и 0.02. Найти вероятность того, что при осмотре хотя бы один из врачей допустит ошибку в диагнозе.

11. В контрольно-аналитической лаборатории имеются три измерительных прибора. Вероятность того, что приборы работают в данный момент времени, равна соответственно $p_1=0,8$; $p_2=0,9$; $p_3=0,95$. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы один прибор.

12. В клетке 6 белых и 4 серые мыши. Случайно выбирают 3-х мышей, не возвращая их обратно. Вычислить вероятность событий:

A) все три мыши белые

B) две белые и одна серая

C) две серые и одна белая

D) все три серые