Дифференциальные уравнения.
Применение дифференциальных уравнений для моделирования медико-биологических процессов.

Уравнение связывающее независимую переменную, функцию этой переменной, ее производные или дифференциалы называется **дифференциальным уравнением.**

Если функция зависит от одной переменной, то диф.уравнение называется **обыкновенным**.

Пример: $y' = 2x$

$y' = 3x^2 + 5x - 8$

Порядок старшей производной, входящей в диф.уравнение называется порядком уравнения.

Решением диф.уравнеия называется функция определенная на множестве D,при подстановке которой в диф.уравнение получаем тождество на множестве D.

Из множества решений диф.уравнения 1-го порядка можно выделить одно, задав условие при $x = x_0$, $y = y_0$ это называется начальным условием.

❖ *График решения диф.уравнения* называется интегральной кривой ,а множество графиков решений называется семейством интегральных кривых.

Уравнение с разделенными переменными.

Имеет вид $P(x)dx + Q(y)dy = 0$

Решение: $\int P(x)dx + \int Q(y)dy = c$ -общий интеграл уравнения с разделенными переменными.

Пример 1: **$xdx + ydy = 0$**

$$\int xdx + \int ydy = c$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c$$

$x^2 + y^2 = c_1$ -это общее решение.

Уравнение с разделяющимися переменными.

Имеет вид $P(x)N(y)dx + Q(y)M(x)dy = 0$

Решение : $P(x)N(y)dx + Q(y)M(x)dy = 0$ $|:N(y) \neq 0$

$:M(x) \neq 0$

$$\frac{P(x)}{M(x)}dx + \frac{Q(y)}{N(y)}dy = 0 \qquad \int \frac{P(x)}{M(x)}dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = c$$

Пример 2:

1) $x(y^2+5)dx + y(x^2+7)dy = 0$ $|: y^2+5 \neq 0$

$: x^2+7 \neq 0$

$$\frac{xdx}{x^2+7} + \frac{ydy}{y^2+5} = 0$$

$$\int \frac{2xdx}{x^2+7} + \int \frac{2ydy}{y^2+5} = 0$$

$\ln|x^2+7|+\ln|y^2+5|=\ln C$

$(x^2+7)(y^2+5)=c_1$ –общее решение уравнения.

Задача:

Концентрация лекарственного вещества в крови человека уменьшается вследствие выведения вещества из организма. Скорость уменьшения концентрации пропорциональна концентрации вещества в данный момент. Определить зависимость концентрации данного вещества в крови от времени, если через 2 часа концентрация была равна 0,6 мг/л, а через 4 часа уменьшилась в 3 раза.

Дано:

$t_1=2c$

$t_2=4c$

$C_1=0{,}6$ мг/л

$C_2=0{,}2$ мг/л

Найти: C(t)=?

Решение:

Скорость изменения концентрации и концентрация C в любой момент времени *t* связаны соотношением: dC/dt=-kC, где *к* - коэффициент пропорциональности, который не зависит от времени. Знак «-» поставлен потому, что концентрация убывает с течением времени.

Решают это уравнение 1-го порядка методом разделения переменных: dC/dt=-kC

Разделяют переменные: dC/C=-kdt

Интегрируют полученное выражение и получают:

$LnC=-kt+LnC_o$ $\qquad LnC - LnC_o=-kt$

Разность логарифмов равна логарифму частного:

$Ln\frac{\tilde{N}}{\tilde{N}_0}=-kt$ или $\boxed{\mathbf{C=C_oe^{-kt}}}$ -общее решение

Подставляя сюда концентрацию при *t* = 2 и t=4,

Получают 2 уравнения: $0{,}6=C_oe^{-2k}$,

$0{,}2=C_oe^{-4k}$

Решают систему уравнений почленным делением правой и левой частей уравнений и получают:

$3=e^{2k}$ $\qquad (e^k)^2=3$ $\qquad e^k=\sqrt{3}$

Логарифмируют полученное уравнение: $k\,Lne=Ln\sqrt{3}$ и получают к=0,53

Выражают C_o из первого уравнения $0{,}6=C_oe^{-2k}$

и получают $C_o=0{,}6*3=1{,}8$ мг/л.

Закон изменения концентрации: $C(t)=0{,}2\,e^{-kt}$ (мг/л)

Ответ: $C(t)=1{,}8\,e^{-0{,}53t}$

Задачи для самостоятельного решения.

1. Найдите общие решения дифференциальных уравнений:

1. $y' = 2x^2$	9. $xdx = ydy$
2. $y' = 2x^2 + 1$	10. $y' = y\cos x$
3. $y' = 5y$	11. $y' = 2xy$
4. $xyy' = 0.5$	12. $dy + 3ydx = 0$
5. $3xdy = 2ydx$	13. $e^y y' = 1$
6. $4x - 3y^2 y' = 0$	14. $e^x y' = 1$
7. $(x+1)dx - 2xydy = 0$	15. $y' = 1/x + e^x$
8. $y'(x+1) = 1$	

2. Найдите частные решения дифференциальных уравнений:

1. $ydy - xdx = dx$, если $y = 0$ при $x = 2$;
2. $y' = \frac{1}{x} + x^2$, если $y = 1 + \frac{\ell^3}{3}$ при $x = e$;
3. $2xy' = y$, если $y = 6$ при $x = 9$;
4. $\sin x dx = dy$, если $y = 1$ при $x = \frac{\pi}{3}$
5. $3y^2 y' = y^3 + 1$, если $y = 2$ при $x = 0$;
6. $(x+1)dy = ydx$, если $y = 8$ при $x = 1$.

3. Решить линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка:

1. $xy' + y = 3x^2$
2. $y' - 2y/x = 5x^3$
3. $x^2 y' = y(x+y)$
4. $y' - 2y/x = -2x$
5. $xy' + 3y = x^2$
6. $y' + 4y = 7$

4. Найти частное решение линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

1. $y' - 2y = 1$ $\quad x=0,\ y=1/2$
2. $y' - 3y/x = x$ $\quad x=1,\ y=1$
3. $2y' - y = e^x$ $\quad x=0,\ y=5$
4. $x^2 y' + 2xy = -4$ $\quad x=-1,\ y=0$

5. Счетчик Гейгера, установленный вблизи радиоактивного изотопа серебра, при первом измерении зарегистрировал 5200-частиц в минуту, а через 24 часа только 300. Найдите закон изменения числа ядер серебра с течением времени при условии, что скорость радиоактивного распада пропорциональна количеству не распавшегося вещества. Определите период полураспада изотопа.

6. Найдите закон роста палочковидных клеток с течением времени, если скорость роста клетки пропорциональна ее длине L $\frac{dL}{dt} = (a-b)L$, где a и b - параметры, характеризующие условия роста клеток; L=Lo при t=0.

7. Скорость сокращения мышцы описывается уравнением: $\frac{dx}{dt} = b(x_0 - x)$,

где x_0 –абсолютная сила мышцы;

b -постоянная величина, зависящая от нагрузки;

x -сокращение мышцы в данный момент.

Найдите закон сокращения мышцы, если x=0 при t=0.

8. Скорость распада некоторого лекарственного вещества пропорциональна его наличному количеству. В результате анализа установили, что через 1 час после инъекции в организме осталось 31.4г лекарственного вещества, а по истечении 3 часов- 9.7г. Определите, сколько лекарственного вещества было введено в организм?

9. При брожении скорость прироста действующего фермента пропорциональна его количеству. Через 1ч после брожения масса фермента составила 6г, а через 3 часа-8г. Найдите массу фермента до начала брожения.

10. При непрерывном внутрисосудистом введении лекарственного препарата с постоянной скоростью **v** изменение его в крови описывается уравнением dm/dt=v-km. Где k – постоянная удаления препарата из крови. Определить зависимость количества лекарственного препарата в крови от времени при условии, что при t=0 m(0)=0

11. Если первоначальное количество фермента равно 1г, а через 1ч становится равным 1,2г, то чему оно будет равно через 5ч после начала брожения? Скорость прироста фермента считать пропорциональной его наличному количеству.

12. Найдите закон убывания лекарственного препарата в организме человека, если через 1 час после введения 10 *мг* препарата его масса уменьшилась вдвое. Какое количество препарата останется в организме через 2 часа? Скорость выведения лекарственного препарата из организма человека считать пропорциональной его наличному количеству.

13. Уменьшение интенсивности света при прохождении через поглощающее вещество пропорционально интенсивности падающего света и толщине поглощающего слоя. Найдите закон убывания интенсивности света, если известно, что при прохождении слоя равного 0,5 м интенсивность света убывает в 2 раза.

14. Скорость роста числа микроорганизмов пропорциональна их количеству в данный момент. В начальный момент имелось 100 микроорганизмов и их число удвоилось за 6 часов. Найти зависимость количества микроорганизмов от времени и количество микроорганизмов через сутки.