Критерии достоверности оценок.

Статистическая проверка гипотез.

Для сравнительной оценки генеральных параметров выборок используют нулевую гипотезу H_0.(μ_1-μ_2=0; $\overline{x_1} - \overline{x_2}$ =0)

Для проверки принятой гипотезы, используют функции распределения, которые называются критериями достоверности (статистические критерии).

Статистические критерии:

- параметрические (t – критерий Стьюдента, F – критерий Фишера);
- непараметрические (Х – критерий Ван-дер-Вардена, Манна-Уитни, Хи^2-критерий).

Критерий Стьюдента.

Критерий Стьюдента применяется для сравнения двух независимых выборок, взятых из нормально распределяющихся совокупностей.

Пусть $\overline{X}_1$ и $\overline{X}_2$ - средние значения выборок, взятых из генеральных совокупностей со средними $\boldsymbol{\mu_1}$ **и** $\boldsymbol{\mu_2}$. Нулевая гипотеза сводится к предположению, что $\boldsymbol{\mu_1 = \mu_2}$.

Критерием для проверки $\mathbf{H_0}$-гипотезы служит отношение:

$$t = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \quad \text{где} \quad S_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sum (Xi - \overline{X}_1)^2 + \sum (X_i - \overline{X}_2)^2}{n(n-1)}}$$

$$t_\text{ф} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sum (Xi - \overline{X}_1)^2 + \sum (X_i - \overline{X}_2)^2}{n(n-1)}}}$$

$\mathbf{H_0}$-гипотезу отвергают, если фактически установленная величина $\mathbf{t_ф}$-критерия превзойдёт или окажется равной стандартному $\mathbf{t_{st}}$- этой величины для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $\mathbf{k=n_1+n_2-2}$,

т. е. при условии: $\mathbf{t_ф \geq t_{st}}$, Если $\mathbf{t_ф < t_{st}}$, то $\mathbf{H_0}$-гипотеза сохраняется.

В случае не равночисленных выборок, т. е. при $\mathbf{n_1 \neq n_2}$

$$t_\text{ф} = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sum (Xi - \overline{X}_1)^2 + \sum (X_i - \overline{X}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2} \left(\frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}\right)}}$$

<u>Задача:</u>

На двух группах крыс поставлен опыт по сравнению влияния разных рационов на рост. Крысы первой группы получали рацион с высоким содержанием белка, крысы второй – с низким. Привесы за 56 дней опыта для каждой крысы составляли в (г):

Высокобелк рацион	**134**	**146**	**104**	**119**	**124**	**161**	**107**
Низкобелк рацион	70	118	101	85	107	132	94

Применяя **t**-критерий Стьюдента определить достоверность влияния высокобелкового рациона на рост крыс.

Для решения задачи составляют таблицу:

№	X_{1i}	X_{2i}	$X_{1i}-\overline{X}_1$	$X_{2i}-\overline{X}_2$	$\left(X_{1i}-\overline{X}_1\right)^2$	$\left((X_{2i}-\overline{X}_2\right)^2$
1	134	70	6	-31	38	961
2	146	118	18	17	329	289
3	104	101	-24	0	569	0
4	119	85	-9	-16	78	256
5	124	107	-4	6	15	36
6	161	132	33	31	1098	961
7	107	94	-21	-7	435	49
$\sum$=	**895**	**707**			**2563**	**2552**
$\overline{X}$ =	**128**	**101**				
	n=	7				

Схема вычисления критерия Стьюдента:

1. Находят средние значения в первой и второй выборке($\overline{X}_1$ $\overline{X}_2$ **).**
2. Находят разность между каждым значением случайной величины и средним значением в первой и второй выборке.
3. Возводят в квадрат полученные разности.
4. Суммируют значения полученных разностей в первой и второй выборке.
5. Подставляют полученные суммы в формулу критерия Стьюдента и рассчитывают фактическое значение критерия Стьюдента по формуле:

$$t_{\hat{o}} = \frac{\left|\overline{x}_1-\overline{x}_2\right|}{\sqrt{\dfrac{\sum\left(x_i-\overline{x}_1\right)^2+\sum\left(x_i-\overline{x}_2\right)^2}{n(n-1)}}} = \frac{|127{,}86-101|}{\sqrt{\dfrac{2562{,}86+2552}{42}}} = 2{,}43$$

ние критерия Стьюдента для P= 0,95 и R=n_1+n_2 –2 числа степеней свободы: R=7+7-2=12, t_{st}=2,18

7. Делают вывод:

$t_ф \geq t_{st}$, Но – отвергается, высокобелковый рацион на рост крыс влияет.

F-критерий Фишера. Проверка гипотез для дисперсий.

Для проверки **H_0** –гипотезы о равенстве генеральных дисперсий (**S_1= S_2**) нормально распределяющихся совокупностей **t**-критерий оказывается недостаточно точным, особенно при оценке разности дисперсий малочисленных выборок. Д. Снедокер предложил использовать отношение выборочных дисперсий, обозначив этот показатель в честь Фишера буквой **F**

т.е. $F=\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ при $\boldsymbol{\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2}$.

Так как принято брать отношение большей дисперсии к меньшей, то критерий **F≥1**.

Если $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$,то **F=1**. Чем значительнее неравенство между выборочными дисперсиями, тем больше будет и величина **F**, и, наоборот, чем меньше окажется разница между дисперсиями, тем меньше будет величина **F**.
Функция **F-** распределения табулирована для **5%**-ного и **1%**-ного уровней значимости и чисел степеней свободы $k_1=n_1-1$ для большей дисперсии и $k_2=n_2-1$ для меньшей. Критические точки для **F**-критерия содержатся в таблице "Значения **F**-критерия Фишера и при уровнях значимости $\alpha=5\%$ (верхняя строка) и $\alpha=1\%$ (нижняя строка)". В этой таблице степени свободы для большей дисперсии k_1 расположены в верхней строке (по горизонтали), а степени свободы для меньшей дисперсии k_2- в первой графе (по вертикали).
Если сравниваемые выборки извлечены из одной и той же генеральной совокупности или из разных совокупностей с дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 равными друг другу: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, то величина **F**-критерия не превысит критические точки F_{st} , указанные в таблице. Если же сравниваемые выборки взяты из разных совокупностей с их параметрами σ_1^2 и σ_2^2 не равными друг другу, то $F_ф \geq F_{st}$ и нулевая гипотеза должна быть отвергнута.

Задача:
Пусть при лечении некоторого заболевания применяются две методики: А и В. Отобраны две однородные группы больных, первая численностью n_1=20, а вторая-n_2=16 человек. Известно, что соответствующие генеральные совокупности X и Y имеют нормальное распределение. Оказалось, что для обеих групп средние значения практически равны, а выборочные дисперсии: σ_1^2 =21,5 и σ_2^2 =32,8. Требуется сопоставить обе методики лечения при уровне значимости α**=0,1.**
Решение:
Дисперсия для метода А: σ_1^2=21,5
Дисперсия для метода В: σ_2^2=32,8
Вычисляют дисперсионное отношение $F=\frac{32,8}{21,5}=1,526$
В таблице для 1**%** уровня значимости (нижняя цифра) и чисел степеней свободы k_1=16-1=15 (см. верхнюю строку таблицы) и k_2=20-1=19 (см. первую графу той же таблицы) находят F_{st}=3,15
Вывод: Так как $F_ф < F_{st}$. нулевая гипотеза остаётся в силе. Обе методики эквивалентны друг другу.

Критерий Ван-дер-Вардена.
Этот критерий относится к группе ранговых критериев, его применяют для проверки нулевой гипотезы при сравнении друг с другом независимых выборок. Техника расчётов Х-критерия Ван-дер-Вардена сводится к следующему. Сравниваемые выборки ранжируют в один общий ряд по возрастающим значениям признака. Затем каждому члену ряда присваивают порядковый номер **(R)** , отмечающий его место в общем ранжированном

строю. Далее по порядковым номерам одной из выборок, обычно меньшей по объёму, находят отношение **R/(N+1), где N+1=n_1+n_2+1.**

С помощью таблицы “Значения функции **ψ[R/(N+1)]** “ находят значения функции **ψ[R/(N+1)]** для каждого значения **R/(N+1).** Суммируя результаты (обязательно с учётом знаков), получают величину $X_ф=\sum\psi[R/(N+1)]$, которую сравнивают с критической точкой этого критерия X_{st} для принятого уровня значимости и общего числа членов сравниваемых выборок, т.е. $N=n_1+n_2$ **.** Критические точки **X**- критерия для **5%**-ного и **1%**-ного уровней значимости и общего числа членов двух выборок . $N=n_1+n_2$ (с учётом разности n_1-n_2) содержатся в таблице “Критические значения Х-критерия Ван-дер-Вардена».

Нулевая гипотеза сводится к предположению, что сравниваемые выборки извлечены из генеральных совокупностей с одинаковыми функциями распределения. Если окажется, что

$X_ф \geq X_{st}$ **,** нулевая гипотеза должна быть отвергнута на принятом уровне значимости.

Задача:

Применяя критерий Ван-дер-Вардена определить достоверность влияния токсических свойств винилпропионата на среднее время гибели мышей на двух группах животных.

Опыт	**22**	**35**	**39**	**41**	**43**	**45**	**46**	**48**	**48**	**69**
Контр	13	14	17	22	26	27	30	32	40	55

Решение: Данные заносят в таблицу.

контр	опыт	**контроль (по возрастанию)**	**Опыт (по возрастанию)**	**R**	**R/(N+1)**	□
13	22	13		1		
14	35	14		2		
17	39	17		3		
22	41	22		4		
26	43		**22**	**5**	**0,24**	**-0,71**
27	45	26		6		
30	46	27		7		
32	48	30		8		
40	48	32		9		
55	69		**35**	**10**	**0,48**	**-0.05**
			39	**11**	**0,52**	**0,05**
		40		12		
			41	**13**	**0,62**	**0,31**
			43	**14**	**0,67**	**0,44**
			45	**15**	**0,71**	**0,55**

			46	**16**	**0,76**	**0,71**	
			48	**17**	**0,81**	**0,88**	
			48	**18**	**0,86**	**1,08**	
		55		19			
n_1=10	**n_2=10**		**69**	**20**	**0,95**	**1,64**	
						∑=	**4,9**