Тема: Элементы дифференциального исчисления.

Функция - это одно из важнейших математических понятий.
<u>Функция</u> - зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению одной переменной x соответствует единственное значение y. Переменную x называют независимой переменной или ***<u>аргументом</u>***. Переменную y называют зависимой переменной.
<u>Графиком функции</u> это множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты - соответствующим значениям функции, то есть по оси абсцисс (OX) откладываются значения переменной x, а по оси ординат (OY) откладываются значения переменной y. Для построения графика функции необходимо знать свойства функции.

Основные свойства функций

1) Область определения функции и область значений функции.
<u>Область определения функции</u> - это множество всех допустимых действительных значений аргумента x (переменной x), при которых функция $y = f(x)$ определена.
<u>Область значений функции</u> - это множество всех действительных значений y, которые принимает функция.

В элементарной математике изучаются функции только на множестве действительных чисел.

2) Нули функции.
<u>Нуль функции</u> – такое значение аргумента, при котором значение функции равно нулю.

3) Промежутки знакопостоянства функции.
Промежутки знакопостоянства функции – такие множества значений аргумента, на которых значения функции только положительны или только отрицательны.

4) Монотонность функции.
<u>Возрастающая функция</u> (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.
<u>Убывающая функция</u> (в некотором промежутке) - функция, у которой большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

5) Четность (нечетность) функции.
<u>Четная функция</u> - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат.
<u>Нечетная функция</u> - функция, у которой область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из области определения справедливо равенство $f(-x) = - f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

6) Ограниченная и неограниченная функции.

Функция называется ***ограниченной***, если существует такое положительное число М, что $|f(x)| \le M$ для всех значений х . Если такого числа не существует, то функция - неограниченная.

Производной функции f(x) в точке x=x₀ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx в точке x при стремлении Δx к нулю:

$$y` = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

1. Производные некоторых функций:

y	$y`$
C	0
x^{μ}	$\mu x^{\mu-1}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

2. Свойства производных:

y	$y`$
$u \pm v$	$u` \pm v`$
uv	$u`v + v`u$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u`v - v`u}{v^2}$
$f_1(u), если\ u = f_2\ (x)$	$y`_u\, u`_x$

3. Общий смысл производной.

Производную $f`(x_0)$ можно трактовать как скорость изменения переменной *Y* относительно переменной *X* в точке X_0.
В практических условиях и функция и аргумент могут иметь достаточно разнообразную природу:
Физика: зависимость пути от времени t *S(t)* $y` = v(t)$-скорость движения тела.
Зависимость объема от времени *y*=V(t); V'(t) – скорость изменения объема
P(t) – давление, T(t) – температура; - скорость нагревания.

Биология: p(t) – число особей в популяции в зависимости от времени t p`(t) – скорость роста популяции.

Химия: x(t) – масса вещества в зависимости от времени t

x`(t) – скорость химической реакции и т.д.

4. **Производная сложной функции.**

Пусть задана функция $y = f(u),\ где\ u = \varphi(x)$ - такая функция называется сложной.

Правило: производная сложной функции $y = f[\varphi(x)]$, которая может быть представлена в виде $y = f(u), где\ u = \varphi(x)$, равна произведению производной функции $y = f(u)$ по промежуточной переменной (обозначается *y`u)*, в которую подставлено значение $u = \varphi(x)$, и производной функции $u = \varphi(x)$ по независимой переменной *X (*обозначается *u`x).*

$$y` = y`_u u`_x$$

Пример:

$y = \sin(x^2 + 3) \qquad u = x^2 + 3$

$y = \sin u \qquad \boldsymbol{y`_u = \cos u} \qquad \boldsymbol{u`_x = 2x}$

$y` = \cos u \times 2x = \cos(x^2 + 3) \times 2x$

5. **Применение производной к исследованию функции на экстремум.**

Условия возрастания и убывания функции:

- Если $f`(x) > 0$ в каждой точке некоторого интервала J, то функция $f(x)$ возрастает на J.
- Если $f`(x) < 0$ в каждой точке некоторого интервала J, то функция $f(x)$ убывает на J.

Точки, в которых $f`(x) = 0$ или не существует, называются **критическими**.

Критическими точками область определения разбивается на интервалы, на каждом из которых производная сохраняет свой знак.

Условия существования точек экстремума.

- Если при переходе через критическую точку $x = x_0$ $f`(x)$ меняет знак с «+» на «-», то $x = x_0$ - **точка максимума.**
- Если при переходе через критическую точку $x = x_0$ $f`(x)$ меняет знак с «-» на «+», то $x = x_0$ - **точка минимума.**

План исследования функции на экстремум.

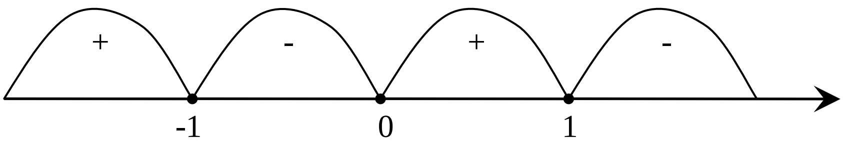
1. Найти область определения функции $y = f(x)$
2. Найти производную функции $y` = f`(x)$

3. Решить уравнение $y` = 0$, найти критические точки функции. Отложить их на числовой оси.
4. Установить знак производной в интервалах слева и справа от каждой критической точки и записать промежутки возрастания и убывания функции.
5. Выяснить какие из критических точек являются точками max, а какие min.

Пример: Дана функция $\boldsymbol{y = 2x^2 - x^4}$. Исследовать на возрастание, убывание, точки экстремума.

1. $D_y = R$
2. $y` = 4x - 4x^3$
3. $y` = 0$
   $4x - 4x^3 = 0$
   $4x \times (1 - x^2) = 0$
   $4x \times (1 - x) \times (1 + x) = 0$
   $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = -1$
   f(0)=0 f(1)=1 f(-1)=1

4. f`(x)



f(x)

5. X=-1 точка max
   X= 1 точка max
   X= 0 точка min

6. Дифференциал функции. Применение к решению задач.

<u>Определение</u>: Дифференциалом функции называется произведение производной функции на приращение аргумента **dy=y`× dx**.
Приращение аргумента X считают равным dx - дифференциалу аргумента.

Алгоритм нахождения дифференциала функции.

1. Найти производную функции.
2. Найти приращение аргумента $\mathbf{\Delta x}$; $\mathbf{dx \approx \Delta x}$; $\mathbf{\Delta x = x_2 - x_1}$.
3. Подставить в формулу $\mathbf{dy = y` \times \Delta x}$.
4. Вместо $\mathbf{x}$ подставляем значение $\mathbf{x_1}$.
5. Вычисляем $\mathbf{dy}$.

Пример:

$y = 4x^2 - 3x$ $x_1 = 3$ $x_2 = 3{,}01$

1. $y` = 8x - 3$
2. $\Delta x = x_2 - x_1 = 3{,}01 - 3 = 0{,}01$
3. $dy = (8x - 3) \times 0{,}01$
4. $dy = (8 \times 3 - 3) \times 0{,}01$
5. $dy = 0{,}21$

Задания для самостоятельной работы

1.Найдите производные следующих функций:

1. $y = x^3 + 2x^2 + 8$
2. $y = \frac{2x^2+3}{4+x^3}$
3. $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$
4. $y = \frac{x^3}{1-4x}$
5. $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$
6. $y = \frac{1-x}{x-1}$
7. $y = x^4 - \frac{1}{x}$
8. $y = \frac{x^2}{2-x^2}$
9. $y = \frac{x^3}{3} - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} + 2$
10. $y = \frac{e^x}{2x}$
11. $y = (2x - 1)(x^2 - 1)$
12. $y = \frac{12\cos x}{1-\sin x}$
13. $y = (1 - 4x^2)(1 + 2x^2)$
14. $y = \frac{e^x}{x^2}$
15. $y = x^4 - 2x^3 - \ln x$
16. $y = \frac{x^3}{\ln x}$
17. $y = \operatorname{tg} x + \ln x + \frac{x^4}{4}$
18. $y = \frac{2x^2 + \ln x}{2}$
19. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$
20. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$
21. $y = x - \sin x$
22. $y = e^{3x}$
23. $y = \ln x + \frac{2}{\sqrt{x}}$
24. $y = \cos 2x$
25. $y = e^x \cos x$
26. $y = sin^2 x$
27. $y = \sin x \cos x$
28. $y = sin x^2$
29. $y = \sin x \ln x$
30. $y = e^{x^2}$
31. $y = x \ln x$
32. $y = \ln(x^2 + 1)$
33. $y = \sqrt{x}\ \ln x$
34. $y = e^{sinx}$
35. $y = \frac{4}{x^2+1}$
36. $y = \ln(\ln x)$
37. $y = \frac{x^2}{2-x}$
38. $y = \sin(\ln x)$

39. $y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$

40. $y = \ln(\cos x)$

2.Исследуйте функцию на экстремум:

1. $y = 2 + x - x^2$
2. $y = 2x^2 - x^4$
3. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$
4. $y = 2x^2 + 5x + 7$
5. $y = 4 - 3x - 5x^2$
6. $y = 6 + 12x - x^2$
7. $y = x^3 + 4x$
8. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$
9. $y = x^3 - 12x + 5x - 6$

2. Вычислите приращение функции, соответствующее изменению аргумента от $\mathbf{x_1}$ до $\mathbf{x_2}$:

1. $y = 3x^2 + x - 1$ $x_1 = 2,$ $x_2 = 2{,}01;$
2. $y = 2x^3 - 4x$ $x_1 = 1,$ $x_2 = 1{,}02;$
3. $y = 3x^2 - 2x$ $x_1 = 2,$ $x_2 = 2{,}001;$
4. $y = 4x^2 - 2x + 2$ $x_1 = 2,$ $x_2 = 2{,}003;$
5. $y = \frac{x^2}{x-1}$ $x_1 = 3,$ $x_2 = 3{,}002.$