Тема: Элементы интегрального исчисления.

В дифференциальном исчислении рассматривались задачи, решение которых требовало отыскания производной данной функции. В ряде случаев приходится решать обратную задачу: по заданной производной отыскивать функцию, которую дифференцировали. Задачи такого рода решаются в разделе математического анализа, называемом ***интегральным исчислением***.

Пусть на некотором промежутке X задана функция y = f(x).

Функция y = F(x) называется ***первообразной*** для f(x) на этом промежутке, если для всех $x \in X$

$$F'(x) = f(x).$$

Две первообразные одной функции отличаются друг от друга на постоянную.

Если F(x) – первообразная для функции f(x) то и функция F(x)+C, где C – произвольное число, так же первообразная для функции f(x), потому что (F(x) + C)` = f(x)

Таблица основных интегралов

Функция f (x)	***Первообразная F***
$\int dx$	X+C
$\int x^{\mu}\,dx$	$\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C$
$\int \frac{dx}{x}$	ln |x| +C
$\int e^{x}\,dx$	e^{x}+C
$\int cosxdx$	sin x+C
$\int sinxdx$	-cos x+C

$\int \frac{dx}{cos^2 x}$	tgx+C
$\int \frac{dx}{sin^2 x}$	-ctgx+C

Неопределенный интеграл.

Неопределенный интеграл функции y = f(x) – это совокупность всех первообразных функций F(x) + C для функции f(x).

Обозначается символом: $\int f(x)\, dx = F(x) + C$. где

$\int$ – знак интеграла

f(x) – подынтегральная функция

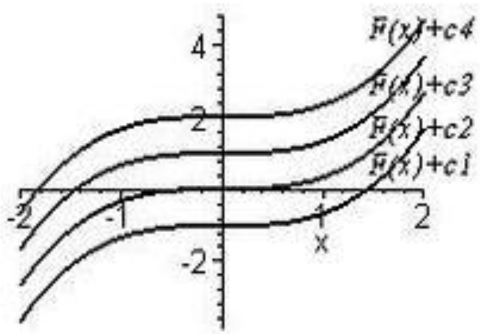
f(x) dx - подынтегральное выражение

C – постоянная интегрирования

X – переменная интегрирования

Интегрирование – это нахождение первообразной по её производной.

Геометрический смысл неопределенного интеграла: это семейство кривых, сдвинутых вдоль оси Oy на величину C.



Основные свойства неопределенного интеграла

1. Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int k\, f(x)dx = k \int f(x)dx$$

2. Интеграл суммы = сумме интегралов

$$\int \big(f(x) + g(x) \big) dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

3. Производная от неопределенного интеграла = подынтегральной функции

$$\int (f(x)dx)` = f(x)$$

4. Дифференциалы от неопределенного интеграла = подынтегральному выражению

$$d \int f(x)dx = f(x)dx$$

Основные методы интегрирования

1. ***Метод непосредственного интегрирования***, который заключается в использовании основных свойств неопределенного интеграла и приведения подынтегрального выражения к табличному виду.

Пример: Найти неопределенный интеграл

$$\int (\frac{3}{x} + 2sinx)\, dx$$

$$\int (\frac{3}{x} + 2sinx)dx = 3 \int \frac{dx}{x} + 2sinxdx = 3\ln|x| - 2cosx + C$$

2. ***Метод подстановки или метод замены переменной.*** Самый эффективный прием сведения неопределенного интеграла к табличному виду. Идея метода замены состоит в том, чтобы **сложное выражение (или некоторую функцию) заменить одной буквой.**
Пример: $\int \cos(3x+2)\, dx$. Мы знаем, что $\int cosxdx$ =sin x+C. Приведем интеграл к табличному. Делаем замену
t= 3x + 2, но при замене у нас остается dx. Заменим dx через dt, т.е. найдем дифференциал

dt = (t)`dx

dt = (3x + 2)`dx

dt = 3dx   Выразим dx

dx = $\frac{dt}{3}$ Подставим новые переменные в интеграл и решим.

$\int \cos(3x+2)dx = \int cost\ \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int costdt = \frac{1}{3}\ sint + C$

Возвращаемся к первоначальной переменной

$$\frac{1}{3}sint + C = \frac{1}{3}\sin(3x+2) + C$$

Определенный интеграл.

Пусть функция y=f(x) задана на отрезке $[a; b]$ и имеет на нем первообразную y=F(x). Разность F(b) –
F(a) называют ***определенным интегралом*** функции f(x) по отрезку $[a; b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема: Если F(x) – первообразная функции для непрерывной функции y = f(x), то есть F`(x)dx = f(x), то имеет место формула:

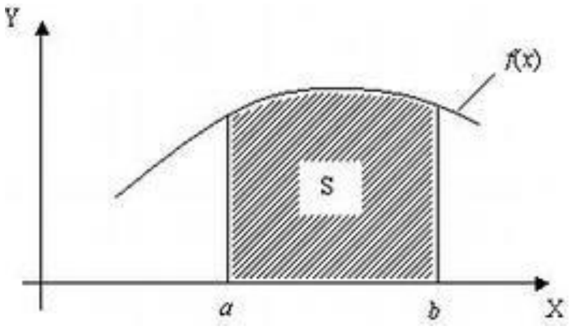
$$\int_a^b f(x)dx = F(X)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула Ньютона – Лейбница – основная формула интегрального исчисления.

Определенный интеграл – это разность значений любой первообразной функции для f(x)при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Геометрический смысл определенного интеграла:

Он численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции y = f(x), осью Ox, прямыми x=a, x=b.



Свойства определенного интеграла.

1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:
   $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
2. Интеграл с одинаковыми пределами равен 0:
   $\int_b^a f(x)dx = 0$
3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:
   $\int_a^b f(x)dx = \int_c^a f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций = алгебраической сумме их определенных интегралов
5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

Пример. Вычислить определенный интеграл.

$$\int_1^2 2x^2dx$$

Решение:

$$\int_1^2 2x^2dx \overset{(1)}{=} 2\int_1^2 x^2dx \overset{(2)}{=} \frac{2}{3}(x^3)\Big|_1^2 \overset{(3)}{=} \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

1. Выносим константу за знак интеграла.

2. Интегрируем по таблице с помощью формулы $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

3. Применим формулу Ньютона – Лейбница. Сначала подставляем в x^3 верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Задание №1

Найдите интеграл:

1. $\int 4x^2 dx$
2. $\int (3x^2 + 2x - 1)\, dx$
3. $\int (4x^3 + 4x - 3)\, dx$
4. $\int x^2(1 + 2x)\, dx$
5. $\int (x + 1)(x + 2)\, dx$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$
7. $\int \frac{x^2 + \sqrt{x^3} + 3}{\sqrt{x}}\, dx$
8. $\int \frac{4 - x}{2 + \sqrt{x}}\, dx$
9. $\int (3x^2 - 2cosx)\, dx$
10. $\int \frac{sin2x}{sinx} dx$
11. $\int \frac{2cos^2x + 1}{cos^2x} dx$
12. $\int \frac{sin^2x - 3}{sin^2x} dx$
13. $\int \frac{e^{2x} + e^x sinx}{e^x} dx$

Задание №2

Найдите интеграл методом замены переменной:

1. $\int \sqrt{2x - 3}\, dx$
2. $\int cos3xdx$
3. $\int e^{2x+1}\, dx$
4. $\int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x + 1}}$

6. $\int \frac{x^3 dx}{(x^4-2)^3}$
7. $\int x\sqrt{a^2+b^2x^2}\, dx$
8. $\int \frac{2dx}{3+4x}$
9. $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$
10. $\int x\sqrt{1-x^2}\, dx$
11. $\int x^2(x^3+9)^3\, dx$
12. $\int \frac{xdx}{2x^2+3}$
13. $\int \frac{x^6 dx}{(x^7-2)^2}$

Задание №3

Вычислите определенный интеграл:

1. $\int_4^9 \sqrt{x}\,\mathrm{dx}$
2. $\int_0^{\pi} sinxdx$
3. $\int_1^0 \frac{3xdx}{4-x^2}$
4. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{3+x^4}$
5. $\int_{-1}^0 x^5(1-x^6)^7 dx$
6. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$
7. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+5}$
8. $\int_1^2 \frac{x^2-4x^3+x^4}{x^2} dx$
9. $\int_1^2 (x^2-2x+3)dx$
10. $\int_0^1 \frac{6x^2 dx}{1+2x^3}$